Programme de colles n° 11 : colles du 2/12 au 6/12

Analyse : intégration sur un segment.
(fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou un espace vectoriel normé de dimension finie)

- Reprise du programme de colle 10 d'intégration sur un segment.
- Formules de Taylor avec reste intégral, de Taylor-Young, inégalité de Taylor-Lagrange (pour des fonctions de classe C^n uniquement).
- Sommes de Riemann associées à une fonction f continue par morceaux sur un segment, pour une subdivision régulière ; convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale de f. Interprétation graphique.

Analyse : intégration sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$

- Intégrales impropres convergentes et divergentes à droite, à gauche et des deux côtés.
- Intégrale des fonctions positives :
  - La convergence de $\int_{[a;b[} f(t)dt$ équivaut à dire que $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée.
    Dans ce cas,
    $$\int_{[a;b[} f(t)dt = \sup_{x\in[a;b[} \int_a^x f(t)dt.$$
  - Intégrales de référence.
  - Théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives
    ($f \leqslant g$, $f = O(g)$ ou $f = o(g)$, $f \sim g$).
- Fonction intégrable sur un intervalle quelconque
  - Convergence absolue, fonctions intégrables.
  - Théorème de comparaison pour les fonctions intégrables ($f = O(g)$ ou $f = o(g)$, $f \sim g$).
  - La convergence absolue implique la convergence.
- Exemple d'intégrale semi-convergente : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.
- Propriétés de l'intégrale impropre : linéarité, relation de Chasles, critère de nullité, inégalité triangulaire, changement de variable et intégration par parties.
- Intégration des relations de comparaison.

⚠
Après la question de cours, la colle débutera par l'étude de la nature d'une intégrale impropre non technique.

Prévisions pour la semaine 12 : convergences simple et uniforme.

Questions de cours spécifiques (les démonstrations doivent être connues) :

- Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour une fonction de classe C^{n+1} sur $[a;b]$.
- Si f est une fonction lipschitzienne sur $[a;b]$ à valeurs dans un espace normé E de dimension finie, alors la suite des sommes de Riemann converge vers $\int_a^b f(x)dx$.
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ converge $\Leftrightarrow \beta > 1$;
- (Banque CCINP) La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est intégrable sur $]2,+\infty[$.
- La convergence absolue d'une intégrale sur un intervalle I implique sa convergence (pour une fonction à valeurs réelles puis pour une fonction à valeurs complexes). On admettra le caractère continu par morceaux des fonctions manipulées.
- Exemple d'intégration d'une relation de comparaison : équivalent de $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.