

Programme de colles n° 13 : colles du 16/12 au 20/12

Analyse : suites et séries de fonctions (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

- Convergence simple d'une suite de fonctions.
- Convergence uniforme d'une suite de fonctions ; interprétation géométrique.
 - Norme infinie sur les fonctions bornées.
 - Convergence uniforme sur tout segment d'un intervalle réel I .
 - Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues.
 - Théorème de la double limite (démonstration hors programme).
- Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment est limite uniforme sur ce segment de fonctions polynomiales.
- Cas des séries de fonctions : convergence simple, caractérisation de la convergence uniforme par la convergence uniforme du reste vers la fonction nulle.
- Convergence normale d'une série.
La convergence normale entraîne la convergence absolue et la convergence uniforme.
- Intégration sur un segment d'une suite de fonctions continues ; convergence en moyenne.
- Théorème d'interversion de la limite et de l'intégrale en cas de convergence uniforme sur un segment (en particulier intégration terme à terme d'une série de fonctions continues sur un segment).
- Théorème de convergence dominée (démonstration hors programme).
- Intégration terme à terme d'une série de fonctions, avec le cas particulier de fonctions positives (les démonstrations sont hors programme).
- Théorème de dérivation d'une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle quelconque I : dérivation de la limite en cas de convergence simple de la suite de fonctions et de convergence uniforme de la suite des dérivées sur I ou sur tout segment de I .
- Adaptation au cas des séries de fonctions (dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe C^1).
- Théorème de dérivation d'une suite de fonctions de classe C^k ($k \geq 2$) :
soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que
 - (i) pour tout n , f_n est de classe C^k sur I ;
 - (ii) pour tout $p \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket$, la suite de fonctions $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction h_p ;
 - (iii) la suite $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment de I) vers une fonction h_k .Alors la fonction limite $h_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est de classe C^k sur I et $h_0^{(p)} = h_p$ pour tout $p \in \llbracket 0; k \rrbracket$.
- Adaptation au cas des séries de fonctions (dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe C^k).



Les intégrales à paramètres seront traitées ultérieurement.

Prévisions pour la semaine 14 : séries entières.

Questions de cours spécifiques (sauf indication contraire, les démonstrations doivent être connues) :

- Énoncer (sans démonstration) deux théorèmes parmi les suivants :
 - ★ Théorème d'interversion de la limite et de l'intégrale en cas de convergence uniforme sur un segment.
 - ★ Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions continues sur un segment, avec hypothèse de convergence uniforme sur ce segment.
 - ★ Théorème de convergence dominée.
 - ★ Intégration terme à terme d'une série de fonctions, avec le cas particulier de fonctions positives.
 - ★ Théorème de dérivation d'une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle I .
 - ★ Théorème de dérivation d'une suite de fonctions de classe C^k ($k \geq 2$) sur un intervalle I .
- Convergence, et calcul de la limite, de la suite $\left(\int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx \right)_{n \geq 1}$.
- Montrer l'égalité suivante à l'aide du théorème d'intégration terme à terme (cas de termes positifs) :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

- La fonction $\exp : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.
- Théorème de dérivation pour une suite de fonctions.
- (Extrait d'un exercice traité en cours). Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ lorsque cela a un sens.
Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.