

Programme de colles n° 14 : colles du 6/01 au 10/01

Analyse : séries entières

- Généralités sur les séries entières.
 - Rayon de convergence, lemme d'Abel ;
 - Convergence absolue sur le disque ouvert de convergence $D(0, R)$ et divergence grossière pour $|z| > R$.
 - Convergence absolue sur l'intervalle ouvert de convergence $] - R; R[$ et divergence grossière pour $|x| > R$.
 - Calcul du rayon de convergence :
 - règle de d'Alembert pour les séries entières ;
 - évaluation en un point ;
 - comparaisons (domination et négligeabilité, équivalent).
- Somme, produit de Cauchy de deux séries entières.
- Propriétés de la somme d'une série entière.
 - Convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence et sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.
 - Théorème d'Abel radial.
 - Intégration et dérivation terme à terme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.
 - Expression de la dérivée k -ème.
 - Unicité des coefficients.
- Développement en série entière (pour une variable réelle).
 - Développement en série de Taylor ;
 - Condition nécessaire et suffisante pour avoir un développement sur un intervalle I : le reste intégral tend vers 0.
 - Exponentielle complexe, formule $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$ pour $z = x + iy$; caractère C^∞ de $t \mapsto e^{tz}$; fonctions usuelles associées : ch , sh , $\cos$, $\sin$;
 - Développement en série de Taylor de $x \mapsto \ln(1+x)$ et de $x \mapsto \arctan(x)$ sur $] - 1; 1[$.
 - Développement en série de Taylor de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ (à l'aide du reste intégral).

Prévisions pour la semaine 15 : intégrales à paramètres.

Questions de cours spécifiques pour cette semaine (sauf mention contraire, les démonstrations doivent être connues) :

- Pour une série entière $\sum a_n z^n$, l'ensemble $E = \{r \geq 0 / \text{ la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ est un intervalle non vide ; définition du rayon de convergence et caractérisation géométrique en termes de convergence absolue ou de divergence grossière de la série entière.
- Lemme d'Abel : si la suite $(a_n \rho^n)$ est bornée pour un $\rho > 0$, alors la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument pour $|z| < \rho$.
- (Série entière somme).
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .
Alors la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence R vérifiant :
 1. $R = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$.
 2. $R \geq R_a$ si $R_a = R_b$.

De plus, pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$, alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

- Développements classiques (sans démonstration) : $\exp$, ch , sh , $\cos$, $\sin$, $x \mapsto 1/(1-x)$, $x \mapsto 1/(1-x)^2$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \arctan(x)$, série du binôme.
- Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé. Alors l'application $\varphi_z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{tz}$ est de classe C^∞ et $\varphi'_z(t) = z e^{tz}$.
Application : pour tout réel $x > 0$, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-tx} \cos t \, dt = \frac{x}{1+x^2}$.
- Développement en série de Taylor de la série du binôme pour un réel α non entier naturel (en utilisant le reste intégral) :

$$\forall x \in] - 1; 1[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$