Lycée Pothier - MP1
F. Blache

Programme de colles n° 15 **: colles du 13/01 au 17/01**

Le programme de cette semaine reprend le programme 14 (séries entières), plus :

Analyse : intégrales dépendant d'un paramètre.
— Théorème de convergence dominée à paramètre réel.
— Théorème de continuité des intégrales à paramètres.
— Théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
— Extension de ces deux théorèmes dans le cas où l'on a l'hypothèse de domination sur tout segment inclus dans l'intervalle I.
— Extension du théorème de dérivation aux fonctions de classe C^k.

Prévisions pour la semaine 16 : début des espaces préhilbertiens réels et euclidiens.

Questions de cours spécifiques (les démonstrations doivent être connues sauf mention contraire) :

- Soit $\theta \in]0;2\pi[$. On admet que les deux séries $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{n}$ et $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$ convergent. Montrer, en utilisant le théorème d'Abel radial, que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin(\theta/2)\right) .$$
- Soit $\theta \in]0;2\pi[$. On admet que les deux séries $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{n}$ et $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$ convergent. Montrer, en utilisant le théorème d'Abel radial, que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2} .$$
- Développements en série entière de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \arcsin(x)$ (les coefficients étant exprimés à l'aide des coefficients binomiaux $\binom{2n}{n}$) pour $x \in]-1;1[$. Par exemple :
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^{2n}.$$
- Énoncé et démonstration du théorème de convergence dominée à paramètre réel, en utilisant le théorème de convergence dominée.
- Énoncer le théorème de continuité et le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètres (sans les démonstrations).
- (Exercice de cours)
Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin(t)}{x+t}\,dt$ est définie et de classe C^1 sur $]0;+\infty[$.