

Programme de colles n° 17 : colles du 27/1 au 31/1

Algèbre linéaire : suite et fin des espaces euclidiens

- Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.
- Isométries vectorielles d'un espace euclidien - Matrices orthogonales.
 - Définitions, ensembles $\mathcal{O}(n)$ et $\mathcal{O}(E)$, valeurs propres.
 - Si un sous-espace F est stable par $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $F^\perp$ l'est aussi.
 - Matrices orthogonales en dimension 2.
 - Sous-groupe $\mathcal{SO}(n)$ des matrices orthogonales de déterminant 1.
 - Caractérisation des matrices orthogonales à l'aide des changements de bases orthonormée.
 - Déterminant d'une isométrie vectorielle (± 1). Groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}(E)$.
 - Théorème général de réduction des isométries vectorielles en base orthonormée.
- Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien.
 - Définition, exemple des projecteurs et symétries orthogonales. Caractérisation matricielle : $u \in \mathcal{S}(E)$ (i.e. u est autoadjoint) si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormée est symétrique.
 - Si F est un sous-espace de E stable par u autoadjoint, alors $F^\perp$ est également stable par u .
 - Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme autoadjoint est scindé sur $\mathbb{R}$.
 - Théorème spectral (et version matricielle) : tout endomorphisme autoadjoint u est diagonalisable dans une base orthonormée.
 - Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs.
- Isométries vectorielles en dimension 2 : ce sont les rotations et les symétries orthogonales.
- Rotations en dimension 3.
- Produit mixte et produit vectoriel (pour la physique, car hors programme en mathématiques en MP).

Prévisions pour la semaine 18 : début des probabilités.

Questions de cours spécifiques (les démonstrations doivent être connues, sauf mention contraire) :

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - (i) $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ (i.e. u conserve le produit scalaire).
 - (ii) $\forall x, y \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ (i.e. u conserve la norme associée au produit scalaire).
 - (iii) Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_0$ telle que $u(\mathcal{B}_0)$ soit aussi une base orthonormée.
 - (iv) Pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$, $u(\mathcal{B})$ est aussi une base orthonormée.
- Une isométrie vectorielle diagonalisable est nécessairement une symétrie orthogonale.
Réciproquement, une symétrie orthogonale est nécessairement une isométrie vectorielle diagonalisable.
- Détermination des matrices orthogonales en dimension 2 : ce sont les matrices de la forme

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{pour } \theta \in \mathbb{R}.$$

- Soit p un projecteur d'un espace euclidien E . Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme autoadjoint de E .
- (Théorème spectral, version matricielle) Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est diagonalisable et il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP = P^\top AP$ soit diagonale (pour la démonstration, on admettra le théorème spectral, version endomorphisme).
- (Théorème de réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormée ; on utilisera le théorème spectral, et on considèrera comme acquis le résultat en dimension 2 (i.e. pour un plan euclidien)).

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ une isométrie vectorielle. Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \varepsilon_r & & & \\ & & & R_{\theta_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix}$$

où pour tout i , $\varepsilon_i \in \{1; -1\}$ et pour tout j , $R_{\theta_j} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une matrice de rotation plane, avec $\theta_j \neq 0 \pmod{\pi}$.