

Programme de colles n° 18 : colles du 3/2 au 7/2

Algèbre euclidienne : révision du programme précédent

- Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.
- Isométries vectorielles d'un espace euclidien.
- Endomorphismes autoadjoints, autoadjoints positifs et définis positifs d'un espace euclidien, avec caractérisation spectrale.
- Versions matricielles des notions précédentes.
- Isométries vectorielles en dimension 2 ; rotations en dimension 3.

Analyse : probabilités

- Probabilités
 - Définition d'un espace probabilisé : univers, tribu, probabilité ; σ -additivité, sous-additivité, continuités croissante et décroissante.
 - Probabilités conditionnelles ; formule des probabilités composées, totales, formule de Bayes.
 - Indépendance d'événements.
- Variables aléatoires discrètes.
 - Loi d'une variable aléatoire réelle.
 - Couple de variables aléatoires discrètes, loi conjointe, loi marginale.



L'indépendance pour les variables aléatoires et les lois usuelles ne seront au programme que la semaine prochaine.

Prévisions pour la semaine 19 : suite des probabilités (indépendance de variables aléatoires, lois usuelles, espérance et variance).

Questions de cours spécifiques (les démonstrations doivent être connues) :

- (Exercice de cours)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f un endomorphisme de E tel que $f^* = -f$.

 1. Montrer que si f est injectif, alors n est pair.
 2. Montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires orthogonaux.
 3. En déduire que le rang de f est pair.
 4. Montrer que la seule valeur propre réelle possible de f est 0.
- Propriétés de continuité croissante et décroissante d'une probabilité.
- Sous-additivité d'une probabilité (pour une réunion dénombrable d'événements $(E_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$) :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_i) .$$

- Formule des probabilités composées.

Formules des probabilités totales et formule de Bayes pour un système quasi-complet d'événements.
- (Exercice de TD)

On dispose de k pièces, dont on sait que toutes sont équilibrées sauf une qui est truquée : celle-ci donne toujours « face ». On choisit une pièce au hasard parmi les k pièces et on la lance n fois ; les n fois on obtient « face ». Quelle est alors la probabilité que la pièce choisie soit la pièce truquée ?
- Soit X une variable aléatoire discrète définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, et $\mathbb{P}$ une probabilité sur cet espace. Alors l'application

$$\mathbb{P}_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0; 1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$$

est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$.