

Programme de colles n° 20 : colles du 3/3 au 7/3

Analyse : tout le chapitre « Probabilités », avec en particulier :

- Covariance.
- Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} ; liens avec l'espérance et la variance.

Analyse : début du chapitre « Équations différentielles linéaires ».

△

Pour cette semaine 20, après la question de cours, la colle commencera par la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, ou d'ordre 2 à coefficients constants (sans difficulté majeure et du programme de MPSI), avant d'aborder un exercice de probabilités. En particulier, pas d'exercice supplémentaire sur les équations différentielles.

Prévisions pour la semaine 21 : équations différentielles linéaires.

Questions de cours spécifiques (sauf mention contraire, les démonstrations doivent être connues) :

- La variable aléatoire X (discrète et à valeurs dans \mathbb{N}) est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1, et dans ce cas $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.
- Fonction génératrice d'une loi de Bernoulli, d'une loi binomiale, d'une loi uniforme, d'une loi géométrique et d'une loi de Poisson. Application au calcul de l'espérance et de la variance pour une de ces lois, au choix de la colleuse / du colleur.
- Inégalité portant sur la covariance de deux variables aléatoires réelles (discrètes) X, Y appartenant à L^2 :

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}.$$

- Soient X et Y deux variables aléatoires réelles (discrètes) appartenant à L^2 , non presque sûrement constantes. Le coefficient de corrélation de X et Y est défini par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \in [-1; 1].$$

Alors

$$\rho(X, Y) = \pm 1 \iff \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} / aX + bY + c = 0 \text{ presque sûrement.}$$

(en admettant le point précédent).

- (Exercice de cours)

Un singe tape, à chaque seconde et de façon aléatoire, une lettre sur un clavier d'ordinateur constitué seulement des 26 lettres majuscules de l'alphabet. Les lettres sont obtenues de façon équiprobable et indépendante.

Calculer le temps moyen que mettra le singe pour taper la séquence « ABRACADABRA » .