Lycée Pothier - MP1
F. Blache

**Programme de colles** n° 21 **: colles du 10/03 au 14/03**

**Analyse : équations différentielles linéaires**

— Équation différentielle linéaire vectorielle d'ordre 1 : $x'(t) = a(t)[x(t)] + b(t)$.
— Traduction matricielle : $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.
— Théorème de Cauchy linéaire (existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy) : résultat admis.
— Étude de l'ensemble des solutions ; base de solutions de l'équation linéaire homogène associée.

— Exponentielle d'un endomorphisme $a$ en dimension finie, d'une matrice $A$.
  — Définitions, exemples (cas d'un endomorphisme $a$ diagonalisable, nilpotent).
  — Continuité, caractère $C^1$ de $t \mapsto \exp(ta)$ sur $\mathbb{R}$.
  — Propriété : $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$ lorsque $a \circ b = b \circ a$.

— Équation différentielle linéaire vectorielle homogène à coefficients constants $x'(t) = a[x(t)]$ :
  — Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy.
  — Résolution en utilisant l'exponentielle matricielle.
  — Résolution par changement de base en dimension 2 et 3.

— Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 ou 2 :
  — Cas $n = 1$ : résolution et méthode de variation de la constante.
  — Cas $n = 2$ : wronskien et méthode de variation des constantes.
  — Cas particuliers où les coefficients de l'équation homogène sont constants.
  — Méthode des séries entières.

**Prévisions pour la semaine 22 (dernière semaine de colles) : calcul différentiel.**

Questions de cours spécifiques :

- Pour $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
- Résolution d'un système différentiel homogène à coefficients constants $X'(t) = AX(t)$ explicite, avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), par changement de base ou bien à l'aide de l'exponentielle matricielle.
- Définition du wronskien $W$ d'un couple de solutions de l'équation différentielle linéaire scalaire $(1')$ d'ordre 2, sur un intervalle $I$ adéquat :
$$(1') \quad x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0.$$
  Propriété : soient $x_1$ et $x_2$ deux solutions (quelconques) de l'équation homogène $(1')$ sur $I$. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :
  (i) $(x_1, x_2)$ est une base de solutions sur $I$ de l'équation $(1')$.
  (ii) $\forall t \in I, W(t) \neq 0$.
  (iii) $\exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0$.
- Résolution de l'équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2 **à coefficient constants** :
$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$$
  en utilisant l'exponentielle matricielle.
- (Banque CCINP 31)
  1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
  2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.