Lycée Pothier - MP1
F. Blache

Programme de colles n° 22 : colles du 17/03 au 21/03
Dernier programme de colle avant les écrits.

Analyse : calcul différentiel et optimisation

- Rappels sur la continuité (caractère C^0).
- Application partielle, dérivée suivant un vecteur, dérivée partielle.
- Différentiabilité.
  - Application différentielle (définition à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1) et différentielle.
  - Expression de la différentielle à l'aide des dérivées partielles.
  - Matrice jacobienne, jacobien.
  - Conservation de la différentiabilité par combinaison linéaire, par produit, par composition (et règle de la chaîne).
- Caractère C^1.
  - Définition par la caractère continûment différentiable.
  - Une fonction est de classe C^1 sur un ouvert U si et seulement si ses dérivées partielles existent et sont C^0 sur U.
  - Exemples.
  - Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs parmi les fonctions de classe C^1 : ce sont les fonctions de différentielle nulle.
- Caractère C^k, C^∞.
  - Définitions, conservation par les opérations usuelles.
  - Théorème de Schwarz pour les fonctions de classe C^2.
- Fonctions de classe C^1 à valeurs réelles.
  - Gradient ; exemples en physique (champ électrique, champ gravitationnel, loi de Fourier) ; cas des coordonnées polaires.
  - Exemples d'équations aux dérivées partielles en physique : équation du transport, de la chaleur, des ondes (résolution dans le cas unidimensionnel).
  - Extremum global, local. Point critique.
  - Étude à l'ordre 2 : matrice hessienne.
  - Condition nécessaire d'existence d'un extremum local.
  - Condition suffisante d'existence d'un extremum local strict.
  - Vecteur tangent à une partie d'un espace normé ; théorème d'optimisation sous une contrainte.

Questions de cours spécifiques (les démonstrations doivent être connues) :

- Soient $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable sur U et $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to U$ une application dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors l'application composée $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I,\ (f \circ \varphi)'(t) = df(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t))\ \varphi_i'(t).$$

- (en admettant le résultat précédent)
  Si $f : U \to F$ est de classe C^1, et γ est de classe C^1 de $[0;1]$ dans U vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

  Conséquence : soit U un ouvert convexe de E. Alors une application $f : U \subset E \to F$ de classe C^1 est constante si et seulement si sa différentielle est nulle sur U .

- Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ tels que pour tout couple $(\rho, \theta) \in V$, $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in U$. On définit

$$\begin{array}{rcl} f : U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} F : V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\rho,\theta) & \longmapsto & f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta). \end{array}$$

  Si f est de classe C^1, alors F est aussi de classe C^1 et on a les formules suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\sin\theta\frac{\partial F}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\cos\theta\frac{\partial F}{\partial \theta}.$$

  Conséquence : expression du gradient en coordonnées polaires.

- Résolution de l'équation des ondes dans le cas unidimensionnel.
- Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$, à valeurs réelles.
  Si f admet un minimum local en a, alors a est un point critique de f et $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.
- Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$, à valeurs réelles.
  Si a est un point critique de f et si $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f admet un maximum local strict en a.