

Programme de colles n° 2 : colles du 15/09 au 19/09

Algèbre linéaire : matrices

- Matrice des composantes d'une famille de vecteurs, matrice d'une application linéaire ;
- Produit de matrices ; traduction en termes de composition d'endomorphismes.
- Matrice définie par blocs ; produit par blocs ;
- Transposée ; traduction matricielle de la relation linéaire $y = f(x)$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$;
- Matrice de passage d'une base à une autre ; changement de coordonnées ;
- Matrices carrées : matrice diagonales et triangulaires ; matrices nilpotentes ; sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques ;
- Rang d'une matrice : relations avec le rang d'une application linéaire, d'un système de vecteurs.
Les matrices A et $A^\top$ ont même rang.
- Matrices inversibles : le groupe $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$.
- Matrices semblables.
- Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme :
 - L'application trace est une forme linéaire ;
 - $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$; deux matrices semblables ont la même trace ;
 - la trace d'un projecteur est égale à son rang.

Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- Définition rigoureuse et identification lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Opérations sur les polynômes, degré, division euclidienne ; idéaux de $\mathbb{K}[X]$.
- Structure de $\mathbb{K}$ -algèbre de $\mathbb{K}[X]$; les sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$.
- Dérivation formelle - lien avec la dérivée en analyse ; formule de Taylor.
- Racines, ordre de multiplicité, polynômes scindés ; somme et produit des racines pour un polynôme scindé.
- Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, dans $\mathbb{C}[X]$.
- Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$, dans $\mathbb{C}[X]$.

Prévisions pour la semaine 3 : arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$, polynômes d'endomorphismes, polynôme minimal, déterminants.

Questions de cours spécifiques du programme 2 (sauf mention contraire, les démonstrations doivent être connues) :

- Énoncer toute définition, tout théorème ou toute propriété du cours (sans démonstration).
- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ reste une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Trace d'une matrice : définition et propriétés.
Trace d'un endomorphisme : définition et propriétés. Trace d'un projecteur.
- Exercice de cours : soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'ordre (ou d'indice) 2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (cf Exercice 85 de Banque CCINP)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$a \text{ est une racine d'ordre } k \iff P(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(k)}(a) \neq 0.$$

- En passant par les nombres complexes, montrer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$ suivante :

$$\frac{1}{X^6 - 1} = \frac{1}{6(X - 1)} - \frac{1}{6(X + 1)} + \frac{X - 2}{6(X^2 - X + 1)} - \frac{X + 2}{6(X^2 + X + 1)}.$$