

Programme de colles n° 4 : colles du 29/9 au 3/10

Algèbre linéaire : réduction des endomorphismes

- Sous-espaces stables, endomorphisme induit ; $\text{Im}(P(v))$ et $\ker(P(v))$ sont stables par u si u et v commutent ; caractérisation matricielle à l'aide de bases adaptées.
- Valeurs propres, vecteurs propres, spectre, sous-espaces propres $E_\lambda(u)$.
 - Les sous-espaces propres sont en somme directe et toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
 - En dimension finie n , le spectre admet au plus n éléments.
- Polynômes annulateurs ; si $P(u) = 0$, toute valeur propre de u est une racine de P .
- Réduction en dimension finie.
 - Polynôme caractéristique d'une matrice carrée (notation χ_A), d'un endomorphisme (notation χ_u).
 - Polynôme minimal d'une matrice carrée (notation π_A), d'un endomorphisme (notation π_u).
 - Théorème de Cayley-Hamilton.
 - Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u , ainsi que de π_u .
 - Si F est un sous-espace stable de E , et u_F est l'endomorphisme induit par u sur F , alors χ_{u_F} divise χ_u .
 - Ordre de multiplicité $m(\lambda)$ d'une valeur propre λ ; $\dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$.
- Diagonalisation
 - Définition pour les endomorphismes, pour les matrices ;
 - Equivalence des quatre propriétés suivantes :
 - (i) u est diagonalisable.
 - (ii) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres pour u .
 - (iii) L'espace E est somme directe des sous-espaces propres : $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(u)} E_\lambda(u)$.
 - (iv) La somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à $\dim E$.
 - L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique.
 - Si le polynôme caractéristique χ_u est simplement scindé (c'est-à-dire scindé à racines simples), alors u est diagonalisable et les sous-espaces propres sont des droites.



Le lemme des noyaux, la caractérisation de la diagonalisabilité à l'aide des polynômes annulateurs et la trigonalisation ne sont pas au programme de cette semaine.

Prévisions pour la semaine 5 :

réduction avec les polynômes annulateurs ; trigonalisation ; applications de la réduction.

Questions de cours spécifiques pour cette semaine (les démonstrations doivent être connues) :

- Énoncer toute définition, tout théorème ou toute propriété du cours (sans démonstration).
- Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent et $P \in \mathbb{K}[X]$, $\text{Im}(P(v))$ et $\ker(P(v))$ sont des sous-espaces stables par u .
Et : un vecteur x est propre pour un endomorphisme u si et seulement si la droite engendrée par x est stable par u .
- Des sous-espaces propres (en nombre fini) associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
En particulier, toute famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- Si P est un polynôme annulateur de l'endomorphisme u , alors toute valeur propre de u est racine de P .
Et : en dimension finie, les valeurs propres d'un endomorphisme u sont exactement les racines de χ_u (resp. de π_u).
- Équivalence des quatre propriétés suivantes (en dimension finie) :
 - (i) u est diagonalisable.
 - (ii) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres pour u .
 - (iii) L'espace E est somme directe des sous-espaces propres : $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
 - (iv) La somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à $\dim E$.
- (Dans cette question, on admet l'équivalence des quatre propriétés du point précédent).
L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :
 - 1) le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$;
 - 2) pour toute valeur propre de u , la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité $m(\lambda)$.