

Programme de colles n° 5 : colles du 6/10 au 10/10

Algèbre linéaire : tout le chapitre de réduction (programmes de colle 4 et 5).

Rappel : dans ce chapitre réduction, E désigne un espace vectoriel sur \mathbb{K} , où \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{C} .

— Réduction et polynômes.

— Lemme de décomposition des noyaux : soient $k \in \mathbb{N}^*$ et P_1, P_2, \dots, P_k des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux, de produit égal à P . Alors, si $u \in \mathcal{L}(E)$, on a la somme directe :

$$\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u) \oplus \dots \oplus \ker P_k(u).$$

— Utilisation des polynômes annulateurs : un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé à racines simples, ou encore si et seulement si son polynôme minimal π_u est scindé à racines simples. Dans ce cas, $\pi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

— Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable et F un sous-espace stable, l'endomorphisme induit u_F est diagonalisable.

— Trigonalisation

— Définition pour les endomorphismes, pour les matrices.

— Théorème : u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_u est scindé.

— Caractérisation : les trois propriétés suivantes sont équivalentes pour $u \in \mathcal{L}(E)$:

(i) L'endomorphisme u est trigonalisable.

(ii) L'endomorphisme u possède un polynôme annulateur scindé sur \mathbb{K} .

(iii) Le polynôme minimal de u est scindé sur \mathbb{K} .

— Cas des endomorphismes nilpotents.

— Sous-espaces caractéristiques (si $\lambda \in \text{Spec}(u)$, $N_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{Id}_E)^{m(\lambda)}$ est le sous-espace caractéristique associé à λ et $m(\lambda)$ la multiplicité de la valeur propre λ).

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme possédant un polynôme annulateur scindé. Alors E est la somme directe de sous-espaces F_i (les sous-espaces caractéristiques de u) stables par u , tels que pour chaque F_i , l'endomorphisme induit par u sur F_i soit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent. Écriture matricielle.

— Applications de la réduction

— Calcul de puissances d'une matrice A : en dimension n quelconque si A est diagonalisable, en dimension 2 ou 3 si A diagonalisable ou trigonalisable (les calculs doivent être guidés dans ce dernier cas).

— Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : écriture sous forme matricielle et expression du terme général.

Prévision pour la semaine 6 : rappels de MPSI sur les suites - début des espaces vectoriels normés.

Questions de cours spécifiques pour cette semaine (sauf précision contraire, les démonstrations doivent être connues) :

• Lemme de décomposition des noyaux pour un produit de deux polynômes.

• Les trois propriétés suivantes sont équivalentes (on admet le lemme de décomposition des noyaux).

(i) L'endomorphisme u est diagonalisable sur \mathbb{K} .

(ii) L'endomorphisme u possède un polynôme annulateur simplement scindé sur \mathbb{K} .

(iii) Le polynôme minimal de u est simplement scindé sur \mathbb{K} (et vaut $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$).

• Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E un espace vectoriel sur \mathbb{K} . Si le polynôme caractéristique de u est simplement scindé sur \mathbb{K} , alors u est diagonalisable.

Réciproque fautive : donner un contre-exemple.

• Dans le cas où $\chi_u(X) = (X - \lambda)^n$, (u est diagonalisable $\iff u = \lambda \text{id}_E$).

(deux méthodes : sous-espaces propres d'une part, polynômes annulateurs d'autre part).

• Démonstration des propriétés suivantes :

(i) Pour toute valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $E_\lambda(u) \subset N_\lambda(u)$.

(ii) L'espace E est somme directe des sous-espaces caractéristiques : $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} N_\lambda(u)$.

(iii) Pour toute valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $N_\lambda(u)$ est stable par u et sa dimension vaut $m(\lambda)$.

• Résolution explicite, sur \mathbb{R} ou sur \mathbb{C} , d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (au choix du colleur) avec conditions initiales (méthode de MPSI).