Lycée Pothier - MP1
F. Blache

Programme de colles n° 6 : colles du 13/10 au 17/10

Algèbre linéaire : tout le chapitre de réduction.

Analyse : rappels sur les suites à valeurs réelles et complexes.
— Convergence, théorème d'encadrement, suites adjacentes.
— Exemples de suites récurrentes de la forme $x_{n+1} = f(x_n)$ où f réelle (calculs guidés).
— Équivalent, relation de domination et négligeabilité (petit « o » et grand « O »).

Analyse : espaces vectoriels normés
— Généralités
  — Normes, exemples (N_∞, N_1 et N_2 sur $\mathbb{K}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, sur l'espace $C^0([a;b],\mathbb{C})$).
  — Distances associées, boules, sphères.
  — Parties convexes, bornées. Applications bornées.
  — Convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé.
  — Applications lipschitziennes d'une partie d'un espace normé E dans un autre espace normé F.
  — Topologie d'un espace normé : ouverts, fermés, point adhérents, points intérieurs ; adhérence d'une partie, intérieur, frontière. Caractérisation séquentielle d'un fermé, d'un point adhérent.

⚠
Pas de développement limité, pas d'exercice sur la topologie induite, pas de normes équivalentes. La continuité sera quant à elle pour la semaine suivante.

Prévisions pour la semaine 7 : espaces vectoriels normés (suite).

Questions de cours spécifiques pour la semaine 6 :

- Etude (monotonie et convergence) de la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$$

- Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est une application continue,
  - l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} /\ f(z) > 0\} = f^{-1}(]0;+\infty[)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$;
  - les ensembles $\{z \in \mathbb{C} /\ f(z) \geqslant 0\} = f^{-1}([0;+\infty[)$ et $\{z \in \mathbb{C} /\ f(z) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ sont des fermés de $\mathbb{C}$.

  On utilisera la caractérisation séquentielle des fermés.

- Définition d'une norme. Démonstration de :

  ⋆ $\|\cdot\|_2$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$ (en admettant l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
  ⋆ $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme sur $C^0([a,b],\mathbb{K})$.

  Pour le second point, on apportera un soin particulier à la démonstration de l'inégalité triangulaire.

- Soit E un espace vectoriel normé. Définitions d'un ouvert de E, d'un fermé de E, d'un voisinage, d'un point intérieur et d'un point adhérent à une partie A de E.
  Si O est un ouvert de E, alors O est voisinage de chacun de ses points ; réciproque.

- Si A est une partie d'un espace vectoriel normé E, son adhérence $\overline{A}$ est le plus petit fermé de E contenant A.

- Définition d'une application lipschitzienne. Exemple d'une application à valeurs réelles de classe C^1 sur un segment.