

Programme de colles n° 7 : colles du 3/11 au 7/11

Espaces (vectoriels) normés

- La partie du programme 6 concernant les espaces vectoriels normés.
- Topologie induite.
- Norme dominée par une autre. Normes équivalentes, traduction en termes de convergence des suites.
- Limite
 - Définition de la limite d'une fonction $f : A \subset E \rightarrow F$ en un point adhérent a à A ;
 - Opérations sur les limites.
- Relations de négligeabilité et de domination en un point (pour les fonctions).
- Continuité
 - Continuité sur un sous-ensemble A d'un espace normé E .
 - Exemples d'applications continues ; opérations usuelles.
 - Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.
 - Espace vectoriel des fonctions continues d'un ensemble A dans un espace normé F .
 - Continuité des applications lipschitziennes.
 - Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.
- Compacité
 - Définition par la propriété de Bolzano-Weierstrass.
 - Lien avec les fermés bornés, produit fini de compacts.
 - Compacts de $\mathbb{K}^n$ pour la norme $\| \cdot \|_\infty$.
 - Application continue sur un compact ; théorème de Heine.
- Espaces normés de dimension finie
 - Equivalence des normes en dimension finie.
 - Caractérisation de la convergence d'une suite par celle des composantes.
 - Théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée d'un espace normé de dimension finie possède une suite extraite convergente.
 - Caractérisation de la continuité d'une fonction par celle des composantes.
 - Continuité des applications linéaires.
 - Toute application linéaire u d'un espace normé E de dimension finie à valeurs dans un espace normé F quelconque est lipschitzienne, donc continue.

Prévisions pour la semaine 8 : connexité par arcs, continuité des applications multilinéaires ; fonctions d'une variable réelle.

Questions de cours spécifiques pour la semaine 7 (les démonstrations doivent être connues) :

- Dans $E = \mathbb{K}^n$, on a, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$:

$$N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq \sqrt{n}N_2(x) \leq nN_\infty(x).$$

Dans $E = C^0([a; b]; \mathbb{K})$, on a, pour toute fonction $f \in E$:

$$N_1(f) \leq \sqrt{b-a}N_2(f) \leq (b-a)N_\infty(f).$$

- [D'après Banque CCINP numéro 35]

E et F désignent deux espaces normés. On note $\|\cdot\|_E$ la norme sur E et $\|\cdot\|_F$ la norme sur F .

Soient f une application de E dans F et a un point de E . On considère les propositions suivantes :

P1. f est continue en a .

P2. Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.

- [D'après Banque CCINP numéro 13]

a) Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.

b) Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.

c) Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

- [D'après Banque CCINP numéro 13]

On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ de E par : $\|P\|_1 = \sum_{i=0}^n |a_i|$.

a) Justifier que $S(0, 1) = \{P \in \mathbb{R}[X] / \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E .

b) Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m et n entiers naturels distincts.

$S(0, 1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

- [D'après Banque CCINP numéro 36]

Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F , alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

P1. f est continue sur E .

P2. f est continue en 0_E .

P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$.

- (Exercice de cours)

Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$.

a) Montrer que l'application $A \mapsto N(A)$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Montrer que l'on a : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, N(A \cdot B) \leq N(A)N(B)$ (i.e. N est une norme sous-multiplicative).