Programme de colles n° 8 : colles du 10/11 au 14/11

Espaces vectoriels normés
- Norme subordonnée.
- Continuité des applications bilinéaires et multilinéaires pour des espaces de dimension finie.
- Continuité du déterminant ; $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Connexité par arcs
  - Chemin continu joignant deux éléments de E.
  - Partie connexe par arcs, étoilée par rapport à un point. Lien avec la convexité.
  - Composantes connexes par arcs.
  - Connexes par arcs de $\mathbb{R}$.
  - Théorème des valeurs intermédiaires.

Analyse : fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (rappels de MPSI)
- Continuité, dérivabilité.
- Formules de Taylor avec reste intégral et de Taylor-Young. Inégalité de Taylor-Lagrange.
- Développements limités classiques, opérations usuelles sur les développements limités.
- Equivalents classiques.

Analyse : fonctions convexes (rappels de MPSI)
- Définition, caractérisation à l'aide du barycentre de n points.
  ⚠ **Conformément au programme, pas de développement général sur les barycentres.**
- Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.
- Le graphe d'une fonction convexe se situe en-dessous de ses sécantes.
- Caractérisation (pour des fonctions suffisamment dérivables) par le caractère croissant de la dérivée, ou la positivité de la dérivée seconde.
- Le graphe d'une fonction convexe dérivable se situe au-dessus de ses tangentes ; inégalités de convexité classiques avec le logarithme et l'exponentielle.

Prévisions pour la semaine 9 : séries.

Questions de cours spécifiques pour cette semaine (sauf mention contraire, les démonstrations doivent être connues) :

- Soit $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$. Alors $|||u|||$ est le plus petit réel positif K tel que : $\forall x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E$.
  Propriété de sous-multiplicativité de la norme subordonnée.
- Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors A est connexe par arcs si et seulement si A est convexe si et seulement si A est un intervalle (en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires de MPSI).
- Tracé des graphes des fonctions sinus sur $[-\pi/2;\pi 2]$ et Arcsin sur $[-1;1]$.
  Domaine de définition de la dérivée d'Arcsin et expression de cette dérivée (avec la démonstration).
  Tracé des graphes des fonctions cosinus sur $[0;\pi]$ et Arccos sur $[-1;1]$.
  Domaine de définition de la dérivée d'Arccos et expression de cette dérivée (avec la démonstration).
- Développements limités classiques à un ordre quelconque (sans démonstration) :
  $\star$ exponentielle et fonctions associées (cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, cosinus et sinus).
  $\star$ $x \mapsto 1/(1-x)$ et fonctions associées ($x \mapsto 1/(1+x)$, $x \mapsto 1/(1+x^2)$, $x \mapsto \ln(1-x)$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \arctan(x)$).
- Développement limité en 0 de la fonction tan à l'ordre 7 (à l'aide la dérivée) :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7).$$

- Caractérisation des fonctions convexes à l'aide du barycentre de n points (inégalité de Jensen de MPSI).