Mathématiques
Année 2025-2026

Lycée Pothier - MP1
F. Blache

Programme de colles n° 10 **: colles du 24/11 au 28/11**

Analyse : sommabilité

- Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0;+\infty]$. Borne supérieure dans $[0;+\infty]$.
- Famille sommable d'éléments de $[0;+\infty]$.
  - Définition, lien avec la convergence absolue dans le cas d'une famille indexée par $\mathbb{N}$.
  - Théorème de sommation par paquets.
- Extension au cas d'une famille de nombres réels, de nombres complexes.
- Théorème de Fubini.
- Cas particulier des séries doubles $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$: la sommabilité implique

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}.$$

- Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. Application :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ \exp(z+z') = \exp z \cdot \exp z'.$$

Analyse : intégration sur un segment.
(fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou un espace vectoriel normé de dimension finie)

- Intégrale d'une fonction en escalier ; linéarité, positivité, relation de Chasles, inégalité triangulaire (propriétés admises).
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux (construction admise) ;
  lien avec les coordonnées, linéarité, positivité, relation de Chasles, inégalité triangulaire.
- Propriétés de l'intégrale :
  - Inégalité de la moyenne ; égalité dans le cas de fonctions à valeurs réelles.
  - Théorème fondamental :
    si F est une primitive d'une fonction f continue sur $[a;b]$, alors $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$.
  - Intégration par parties pour des fonctions de classe C^1 sur $[a;b]$.
  - Changement de variable pour une fonction continue sur $[a;b]$, via une fonction auxiliaire de classe C^1.
- Caractère C^1 et dérivée de : $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ pour f continue sur un intervalle.
  Étude des primitives de f sur I.

  ⚠
  Formules de Taylor et sommes de Riemann ne sont pas au programme de cette semaine.

- Primitives classiques.

⚠
Après la question de cours, la colle commencera par une étude de sommabilité. Cette étude évitera tout excès de technique et sera l'occasion de travailler les méthodes classiques du cours sur les séries (en particulier comparaison série-intégrale et sommation des relations de comparaisons).

Prévisions pour la semaine 11 : formules de Taylor et sommes de Riemann, intégrales impropres.

Questions de cours spécifiques (les démonstrations doivent être connues) :

- Énoncé du théorème sur le produit de Cauchy et propriété : $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$ pour $z, z' \in \mathbb{C}$.
- La famille $\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)_{p,q\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable (démonstration en utilisant une majoration puis le théorème de sommations par paquets (cas positif)).
- Caractère C^1 et dérivée de : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ pour f continue sur un intervalle I et $a \in I$ fixé.
- Les trois théorèmes importants du calcul intégral (démonstration dans le cas de fonctions continues (ou de classe C^1 pour une intégration par parties) sur le segment $[a;b]$) : théorème fondamental, intégration par parties et changement de variable.
- Six primitives au choix dans le tableau suivant (C est une constante, les domaines de définition sont à connaître) :

Fonction	**Primitive**
$x \mapsto x^\alpha$	$\begin{cases} x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C & \text{si } \alpha \neq -1 \\ x \mapsto \ln\|x\| + C & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x + C$
$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto x\ln x - x + C$
$x \mapsto b^x (b > 0, b \neq 1)$	$x \mapsto \dfrac{b^x}{\ln b} + C$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + C$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + C$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto -\ln\|\cos x\| + C$
$x \mapsto \text{cotan}x$	$x \mapsto \ln\|\sin x\| + C$
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + C$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \mapsto -\text{cotan}x + C$
$x \mapsto \text{ ch } x$	$x \mapsto \text{ sh } x + C$
$x \mapsto \text{ sh } x$	$x \mapsto \text{ ch } x + C$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$	$x \mapsto \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin\frac{x}{a} + C (a > 0)$

- Calcul des intégrales de Wallis :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx$$

et obtention de la formule $I_{2p} \cdot I_{2p+1} \cdot (2p+1) = \pi/2$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.