Programme de colles n° 12 : colles du 8/12 au 12/12

Analyse : intégrales généralisées

Révision du programme de colles de la semaine précédente, avec de plus :

— Fonction de carré intégrable : notation $L^2(I, \mathbb{K})$.
— L'ensemble $L^2(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0_{pm}(I, \mathbb{K})$.
— Le produit de deux fonctions f et g, continues et de carré intégrable sur I, est intégrable sur I, et on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_I |fg| \leq \sqrt{\int_I |f|^2}\sqrt{\int_I |g|^2}.$$

Analyse : suites et séries de fonctions (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

— Convergence simple d'une suite de fonctions.
— Convergence uniforme d'une suite de fonctions ; interprétation géométrique.
  — Lien avec la norme infinie, dans le cas de fonctions bornées.
  — Convergence uniforme sur tout segment d'un intervalle réel I.
  — Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues.
  — Théorème de la double limite (démonstration hors programme).
— Cas des séries de fonctions : convergence simple, caractérisation de la convergence uniforme par la convergence uniforme du reste vers la fonction nulle.
— Convergence normale d'une série.
La convergence normale entraîne la convergence absolue et la convergence uniforme.
— Intégration sur un segment d'une suite de fonctions continues ; convergence en moyenne.
— Théorème d'interversion de la limite et de l'intégrale en cas de convergence uniforme **sur un segment** (en particulier intégration terme à terme d'une série de fonctions continues **sur un segment**).

Prévisions pour la semaine 13 : dérivabilité pour les suites/séries de fonctions - convergence dominée.

Questions de cours spécifiques (les démonstrations doivent être connues) :

- On rappelle que la transformée de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-ixt}\, dt.$$

  Calculer la transformée de Fourier $\hat{g}$ de la fonction g égale à l'indicatrice du segment $[a; b]$, et justifier que $\hat{g}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  Montrer que $\hat{g}$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (on admettra pour cela le résultat suivant vu en semaine 11 : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ n'est pas absolument convergente), mais que $\hat{g}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- (cf Banque CCINP Ex 29) Lorsque l'intégrale converge, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t.$$

  1. Montrer que le domaine de définition de Γ est $]0, +\infty[$.
  2. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
  3. Calculer $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- La convergence uniforme sur I entraîne la convergence uniforme sur tout segment de I ; réciproque fausse (contre-exemple à développer : $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$ sur $I =]0; +\infty[$).
  La convergence uniforme sur tout segment de I entraîne la convergence simple sur I.
- Conservation de la continuité en un point par passage à la limite uniforme pour une suite de fonctions (énoncé et démonstration dans le cas où la convergence uniforme a lieu sur tout l'intervalle I).
- Pour tout $x \in I =]0; \pi[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin^2(nx)}{(n \sin x)^2}$.
  Alors la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur l'intervalle I, ne converge pas uniformément sur I (en utilisant le théorème de la double limite), et (f_n) converge uniformément sur tout segment de I.
- Théorème d'interversion de la limite et de l'intégrale pour une suite de fonctions continues sur un segment, qui converge uniformément sur ce segment.