Mathématiques
Année 2025-2026

Lycée Pothier - MP1
F. Blache

Programme de colles n° 13 : colles du 15/12 au 19/12

Analyse : suites et séries de fonctions (définies, dans le cas le plus général, sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie)

- Convergence simple d'une suite de fonctions.
- Convergence uniforme d'une suite de fonctions ; interprétation géométrique.
  - Norme infinie sur les fonctions bornées.
  - Convergence uniforme sur tout segment d'un intervalle réel I.
  - Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues.
  - Théorème de la double limite (démonstration hors programme).
- Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment est limite uniforme sur ce segment de fonctions polynomiales.
- Cas des séries de fonctions : convergence simple, caractérisation de la convergence uniforme par la convergence uniforme du reste vers la fonction nulle.
- Convergence normale d'une série de fonctions.
  La convergence normale entraîne la convergence absolue et la convergence uniforme.
- Intégration sur un segment d'une suite de fonctions continues ; convergence en moyenne.
- Théorème d'interversion de la limite et de l'intégrale en cas de convergence uniforme sur un segment (en particulier intégration terme à terme d'une série de fonctions continues sur un segment).
- Théorème de convergence dominée pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (démonstration hors programme).
- Intégration terme à terme d'une série de fonctions pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, avec le cas particulier de fonctions positives (les démonstrations sont hors programme).
- Théorème de dérivation d'une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle quelconque I : dérivation de la limite en cas de convergence simple de la suite de fonctions et de convergence uniforme de la suite des dérivées sur I ou sur tout segment de I.
- Adaptation au cas des séries de fonctions (dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe C^1).
- Théorème de dérivation d'une suite de fonctions de classe C^k ($k \geqslant 2$) :
  soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que
  (i) pour tout n, f_n est de classe C^k sur I ;
  (ii) pour tout $p \in [\![0; k-1]\!]$, la suite de fonctions $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction h_p ;
  (iii) la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment de I) vers une fonction h_k.
  Alors la fonction limite $h_0 = \lim_{n\to+\infty} f_n$ est de classe C^k sur I et $h_0^{(p)} = h_p$ pour tout $p \in [\![0; k]\!]$.
- Adaptation au cas des séries de fonctions (dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe C^k).

⚠
Les intégrales à paramètres seront traitées ultérieurement.

Prévisions pour la semaine 14 : séries entières.

Questions de cours spécifiques (sauf indication contraire, les démonstrations doivent être connues) :

- Exercice de cours.

  Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie et (u_n) une suite d'éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ normé par la norme subordonnée. Alors on a l'équivalence :

  la suite (u_n) converge vers u dans $\mathcal{L}(E, F)$ si et seulement si la suite de fonctions (u_n) converge uniformément vers u sur toute partie bornée de E.

- Énoncer (sans démonstration) deux théorèmes parmi les suivants :

  ⋆ Théorème d'interversion de la limite et de l'intégrale en cas de convergence uniforme sur un segment.

  ⋆ Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions continues sur un segment, avec hypothèse de convergence uniforme sur ce segment.

  ⋆ Théorème de convergence dominée.

  ⋆ Intégration terme à terme d'une série de fonctions, avec le cas particulier de fonctions positives.

  ⋆ Théorème de dérivation d'une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle I.

  ⋆ Théorème de dérivation d'une suite de fonctions de classe C^k $(k \geqslant 2)$ sur un intervalle I.

- Convergence, et calcul de la limite, de la suite $\left(\displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx\right)_{n \geqslant 1.}$

- Montrer l'égalité suivante à l'aide du théorème d'intégration terme à terme (cas de termes positifs) :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\, dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

- La fonction zêta de Riemann : $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$.

- Théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe C^1, en considérant comme acquis le théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions.