Programme de colles n° 14 **: colles du 5/01 au 9/01**

Analyse : séries entières

- Généralités sur les séries entières.
  - Rayon de convergence, lemme d'Abel ;
  - Convergence absolue sur le disque ouvert de convergence $D(0, R)$ et divergence grossière pour $|z| > R$.
  - Convergence absolue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R; R[$ et divergence grossière pour $|x| > R$.
  - Calcul du rayon de convergence :
    - règle de d'Alembert pour les séries entières ;
    - évaluation en un point ;
    - comparaisons (domination et négligeabilité, équivalent).
- Somme, produit de Cauchy de deux séries entières.
- Propriétés de la somme d'une série entière.
  - Convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence et sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.
  - Théorème d'Abel radial.
  - Intégration et dérivation terme à terme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.
  - Expression de la dérivée k-ème.
  - Unicité des coefficients.
- Développement en série entière (pour une variable réelle).
  - Développement en série de Taylor ;
  - Condition nécessaire et suffisante pour avoir un développement sur un intervalle I : le reste intégral tend vers 0.
  - Exponentielle complexe, formule $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$ pour $z = x + iy$; caractère C^∞ de $t \mapsto e^{tz}$; fonctions usuelles associées : ch , sh , cos, sin ;
  - Développement en série de Taylor de $x \mapsto \ln(1 + x)$ et de $x \mapsto \arctan(x)$ sur $]-1; 1[$.
  - Développement en série de Taylor de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ (à l'aide d'une équation différentielle).

Prévisions pour la semaine 15 : intégrales à paramètres.

Questions de cours spécifiques pour cette semaine (sauf mention contraire, les démonstrations doivent être connues) :

- Pour une série entière $\sum a_n z^n$, l'ensemble $E = \{r \geqslant 0/ \text{ la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ est un intervalle non vide ; définition du rayon de convergence et caractérisation géométrique en termes de convergence absolue ou de divergence grossière de la série entière.
- Règle de d'Alembert pour les séries entières.
- Produit de Cauchy de deux séries entières sur $\mathbb{C}$: définition, minoration du rayon de convergence et exemples :
  1) $(\sum z^n) * (\sum z^n)$;
  2) $(\sum z^n) * (1 - z)$.
- Obtention de la formule $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ à l'aide du théorème d'Abel radial et du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ sur l'intervalle $]-1; 1[$.
- Développements classiques (sans démonstration) : exp, ch, sh, cos, sin, $x \mapsto 1/(1-x)$, $x \mapsto 1/(1-x)^2$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \arctan(x)$, $x \mapsto (1+x)^{1/2}$, $x \mapsto (1+x)^{-1/2}$.
- Développement en série de Taylor de la série du binôme pour un réel α non entier naturel (méthode de l'équation différentielle) :

$$\forall x \in]-1; 1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$