Programme de colles n° 15 **: colles du 12/01 au 16/01**

Le programme de cette semaine reprend le programme 14 (séries entières), plus :

Analyse : intégrales dépendant d'un paramètre.
— Théorème de convergence dominée à paramètre réel.
— Théorème de continuité des intégrales à paramètres.
— Théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
— Extension de ces deux théorèmes dans le cas où l'on a l'hypothèse de domination sur tout segment inclus dans l'intervalle I.
— Extension du théorème de dérivation aux fonctions de classe C^k.

Prévisions pour la semaine 16 : début des espaces préhilbertiens réels et euclidiens.

Questions de cours spécifiques (les démonstrations doivent être connues sauf mention contraire) :

- Exercice de TD.
  Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini, de somme f.
  1. Montrer la formule suivante (dite de Cauchy) :
  $$\forall r>0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}d\theta.$$
  2. On suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'alors f est constante.
- Énoncé et démonstration du théorème de convergence dominée à paramètre réel, en utilisant le théorème de convergence dominée.
- Énoncer le théorème de continuité et le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètres (sans les démonstrations).
- On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$.
  Montrer que g est définie et continue sur $]1;+\infty[$, puis que g admet une limite en $+\infty$ (à déterminer).
- Exercice de cours (écrit CCINP 2024).
  On pose pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\,dt$.
  Démontrer que la fonction f est bien définie et continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$, puis que f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0,1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.
- Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt$. Montrer que g est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$, puis donner une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que vérifie g sur $]0;+\infty[$.