Programme de colles n° 16 : colles du 19/01 au 23/01

Algèbre linéaire : espaces préhilbertiens réels et euclidiens (début)

— Produit scalaire.
  — Exemples (sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $C^0([a,b],\mathbb{R})$ et sur $L^2(I,\mathbb{R}) \cap C^0(I,\mathbb{R})$).
  — Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité ; polarisation, identité du parallélogramme.
  — Orthogonalité ; théorème de Pythagore.
  — Familles orthogonales et orthonormées ; somme directe et supplémentaire orthogonaux.
— Base orthonormée d'un espace euclidien E.
  — Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.
  — Existence de bases orthonormées.
  — Si E est préhilbertien réel et F un sous-espace de dimension finie de E, alors $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$.
  — Si E est un espace euclidien et F un sous-espace de E, alors $F = (F^{\perp})^{\perp}$.
  — Théorème de la base orthonormée incomplète.
— Projection orthogonale p_F sur un sous-espace F de dimension finie.
  — Expression de p_F dans une base orthonormée.
  — Distance au sous-espace F.
  — Symétrie orthogonale associée.
  — Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
— Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.
  — Existence et unicité.
  — Linéarité, propriété d'involution.
  — Adjoint de $v \circ u$.
  — Écriture matricielle de l'adjoint dans une base orthonormée.

⚠ **Pas d'isométries vectorielles ni d'endomorphismes autoadjoints cette semaine.**

Prévisions pour la semaine 17 : isométries vectorielles, endomorphismes autoadjoints.

Questions de cours spécifiques pour cette semaine (les démonstrations doivent être connues) :

- L'application
$$(f,g) \mapsto \int_I f(t)g(t)\,dt$$
définit un produit scalaire sur $L^2(I,\mathbb{R}) \cap C^0(I,\mathbb{R})$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire et cas d'égalité : démonstration en utilisant le point de vue variationnel.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire et cas d'égalité : démonstration en utilisant le point de vue géométrique.
- Calcul de la distance euclidienne de la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
au sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ des matrices symétriques, en utilisant la décomposition classique $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ (les étudiant(e)s doivent être capables de montrer cette somme directe orthogonale).
- Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
- Existence et unicité de l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.
  Matrice dans une base orthonormée de l'adjoint u^* d'un endomorphisme u.
  Si F est un sous-espace de l'espace euclidien E, stable par l'endomorphisme u, alors $F^{\perp}$ est stable par u^*.