Programme de colles n° 17 **: colles du 26/1 au 30/1.**

Algèbre linéaire : suite et fin des espaces euclidiens

- Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.
- Isométries vectorielles d'un espace euclidien - Matrices orthogonales.
  - Définitions, ensembles $\mathcal{O}(n)$ et $\mathcal{O}(E)$, valeurs propres.
  - Si un sous-espace F est stable par $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $F^{\perp}$ l'est aussi.
  - Matrices orthogonales en dimension 2.
  - Sous-groupe $\mathcal{SO}(n)$ des matrices orthogonales de déterminant 1.
  - Caractérisation des matrices orthogonales à l'aide des changements de bases orthonormée.
  - Déterminant d'une isométrie vectorielle (± 1). Groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}(E)$.
  - Théorème général de réduction des isométries vectorielles en base orthonormée.
- Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien.
  - Définition, exemple des projecteurs et symétries orthogonales. Caractérisation matricielle : $u \in \mathcal{S}(E)$ (i.e. u est autoadjoint) si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormée est symétrique.
  - Si F est un sous-espace de E stable par u autoadjoint, alors $F^{\perp}$ est également stable par u.
  - Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme autoadjoint est scindé sur $\mathbb{R}$.
  - Théorème spectral (et version matricielle) : tout endomorphisme autoadjoint u est diagonalisable dans une base orthonormée.
  - Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs.
- Isométries vectorielles en dimension 2 : ce sont les rotations et les symétries orthogonales.
- Rotations en dimension 3.
- Produit mixte et produit vectoriel (pour la physique, car hors programme en mathématiques en MP).

Prévisions pour la semaine 18 : révisions sur les espaces euclidiens et début des probabilités.

Questions de cours spécifiques (les démonstrations doivent être connues, sauf mention contraire) :

- Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ et u^* son adjoint. Montrer que $\ker(u^*) = (\mathrm{Im}\, u)^{\perp}$ et $\mathrm{Im}\,(u^*) = (\ker u)^{\perp}$.
- Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E (sur $\mathbb{R}$) de dimension finie. Alors E contient une droite ou un plan stable par u (« ou » inclusif).
  Cette propriété est utile dans les démonstrations du chapitre sur les espaces euclidiens.
- 1) Si F est un sous-espace de E stable par u autoadjoint, alors $F^{\perp}$ est également stable par u.

  2) Deux sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint, associés à des valeurs propres distinctes, sont orthogonaux.
- Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors : $\big(\ u$ est positif (resp. défini positif) si et seulement si $\mathrm{Sp}\,(u) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $\mathrm{Sp}\,(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ $)\ \big)$.
- Énoncer sans démonstration le théorème de réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormée et le théorème spectral (versions endomorphisme et matricielle).
- Diagonaliser dans une base orthonormée la matrice symétrique réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$