Programme de colles n° 18 : colles du 2/2 au 6/2

Algèbre euclidienne : révision du programme précédent

- Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.
- Isométries vectorielles d'un espace euclidien.
- Endomorphismes autoadjoints, autoadjoints positifs et définis positifs d'un espace euclidien, avec caractérisation spectrale.
- Versions matricielles des notions précédentes.
- Isométries vectorielles en dimension 2 ; rotations en dimension 3.

Analyse : probabilités

- Probabilités
  - Définition d'un espace probabilisé : univers, tribu, probabilité ;
    σ-additivité, sous-additivité, continuités croissante et décroissante.
  - Probabilités conditionnelles ; formule des probabilités composées, totales, formule de Bayes.
  - Indépendance d'événements.
- Variables aléatoires discrètes.
  - Loi d'une variable aléatoire réelle.
  - Couple de variables aléatoires discrètes, loi conjointe, loi marginale.

⚠
L'indépendance pour les variables aléatoires et les lois usuelles ne seront au programme que la semaine prochaine.

Prévisions pour la semaine 19 : suite des probabilités (indépendance de variables aléatoires, lois usuelles, espérance et variance).

Questions de cours spécifiques (les démonstrations doivent être connues) :

- (Exercice de TD)
  Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et u un endomorphisme antisymétrique, c'est-à-dire :
  $$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle.$$
  1. Montrer que
  $$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0 \ \text{ et } \ \langle u^2(x), x\rangle \leqslant 0.$$
  2. Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{0_{\mathbb{R}}\}$. Que dire de u si u est diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
  3. Montrer que u^2 est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_-$, et en déduire que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(u) \subset i\mathbb{R}$.
- (Exercice de TD)
  Le cadre et les notations sont les mêmes qu'à la question précédente. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E ; on note A la matrice de u dans cette base.
  1. Montrer que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que $A^\top A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
  2. En s'intéressant à $\det(A^\top A)$, montrer que si u et inversible, alors la dimension de E est paire.
- Définition d'une tribu. Une intersection dénombrable d'événements reste un événement.
- Formule des probabilités composées.
  Formules des probabilités totales pour un système quasi-complet d'événements.
  En utilisant la formule précédente, formule de Bayes pour un système quasi-complet d'événements de probabilités non nulles.
- Définitions de l'indépendance : cas général, indépendance 2 à 2.
  Définition de l'incompatibilité de deux événements.
  Que dire de deux événements qui sont à la fois indépendants et incompatibles ?
- Soit X une variable aléatoire discrète définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, et $\mathbb{P}$ une probabilité sur cet espace. Alors l'application
  $$\mathbb{P}_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) & \longrightarrow & [0;1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array} \right.$$
  est une probabilité sur $\big(X(\Omega), \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big)\big)$.