Mathématiques — Lycée Pothier - MP1
Année 2025-2026 — F. Blache

Programme de colles n° 19 : colles du 9/2 au 13/2

Analyse : variables aléatoires discrètes (sauf la première question de cours)

- Loi d'une variable aléatoire discrète.
- Couple de variables aléatoires discrètes, loi conjointe, loi marginale.
- Indépendance, suite de variables aléatoires indépendantes.
- Lois usuelles (rappels de première année) : loi uniforme sur un ensemble fini, loi de Bernoulli de paramètre p, loi binomiale de paramètres n et p.
- Lois usuelles (programme de seconde année) : loi géométrique, loi de Poisson.
- Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson pour $n \cdot p \approx \lambda$.
- Espérance. Notation $X \in L^1$ pour une variable aléatoire X d'espérance finie.
- Variance. Notation $X \in L^2$ pour une variable aléatoire X telle que X^2 est d'espérance finie.
- Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev.
- Loi faible des grands nombres.

Prévisions pour la semaine 20 : probabilités (suite et fin, avec covariance et fonctions génératrices).

Questions de cours spécifiques (les démonstrations doivent être connues, sauf mention contraire) :

- Pour toute matrice $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, existence et unicité d'une matrice $R \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$.
- 1) Espérance de l'indicatrice d'un événement.
  2) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$,
  $$\sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n),$$
  et donc en particulier $X \in L^1$ si et seulement si $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n) < +\infty$, et dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$.
- Espérances des lois de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
- Si X et Y sont dans L^1 et indépendantes, alors la variable aléatoire XY est dans L^1 et : $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
- Variances des lois binomiale, géométrique, de Poisson.
- Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev.