Lycée Pothier - MP1
F. Blache

Programme de colles n° 20 : colles du 2/3 au 6/3

Analyse : tout le chapitre « Probabilités », avec en particulier :

— Covariance.
— Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$; liens avec l'espérance et la variance.

Analyse : début du chapitre « Équations différentielles linéaires ».

⚠
Pour cette semaine 20, après la question de cours, la colle commencera par la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, ou d'ordre 2 à coefficients constants (sans difficulté majeure et du programme de MPSI), avant d'aborder un exercice de probabilités. En particulier, pas d'exercice supplémentaire sur les équations différentielles.

Prévisions pour la semaine 21 : équations différentielles linéaires.

Questions de cours spécifiques (sauf mention contraire, les démonstrations doivent être connues) :

- Fonction génératrice d'une loi de Bernoulli, d'une loi binomiale, d'une loi uniforme, d'une loi géométrique et d'une loi de Poisson. Application au calcul de l'espérance et de la variance pour une de ces lois, au choix de la colleuse / du colleur.
- (Exercice de cours)
  On considère une boîte contenant quatre boules numérotées $0, 1, 1$ et 2. On effectue n tirages dans cette boîte avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire (discrète) S_n.
- Inégalité portant sur la covariance de deux variables aléatoires réelles (discrètes) X, Y appartenant à L^2 :
$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}.$$
- Soient X et Y deux variables aléatoires réelles (discrètes) appartenant à L^2, non presque sûrement constantes. Le coefficient de corrélation de X et Y est défini par :
$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \in [-1;1].$$
  Alors
$$\rho(X,Y) = \pm 1 \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \ / \ aX + bY + c = 0 \text{ presque sûrement.}$$
  (en admettant le point précédent).
- Énoncé du théorème de Cauchy linéaire (existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy). Isomorphisme entre l'espace vectoriel F (tel que $x(t) \in F$) et l'espace des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $x'(t) = a(t)[x(t)]$.