

Programme de colles n° 21 : colles du 9/03 au 13/03

Analyse : équations différentielles linéaires

- Équation différentielle linéaire vectorielle d'ordre 1 : $x'(t) = a(t)[x(t)] + b(t)$.
- Traduction matricielle : $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.
- Théorème de Cauchy linéaire (existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy) : résultat admis.
- Étude de l'ensemble des solutions ; base de solutions de l'équation linéaire homogène associée.

- Exponentielle d'un endomorphisme a en dimension finie, d'une matrice A .
 - Définitions, exemples (cas d'un endomorphisme a diagonalisable, nilpotent).
 - Continuité, caractère C^1 de $t \mapsto \exp(ta)$ sur $\mathbb{R}$.
 - Propriété : $\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$ lorsque $a \circ b = b \circ a$.

- Équation différentielle linéaire vectorielle homogène à coefficients constants $x'(t) = a[x(t)]$:
 - Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy.
 - Résolution en utilisant l'exponentielle matricielle.
 - Résolution par changement de base en dimension 2 et 3.

- Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 ou 2 :
 - Cas $n = 1$: résolution et méthode de variation de la constante.
 - Cas $n = 2$: wronskien et méthode de variation des constantes.
 - Cas particuliers où les coefficients de l'équation homogène sont constants.
 - Méthode des séries entières.

Prévisions pour la semaine 22 (dernière semaine de colles) : structures algébriques usuelles.

Questions de cours spécifiques :

- Résolution d'un système différentiel homogène à coefficients constants $X'(t) = AX(t)$ explicite, avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ **diagonalisable** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), par changement de base ou bien à l'aide de l'exponentielle matricielle.
- Démonstration du théorème suivant :
si la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ dans une base $\mathcal{B}_d = (V_1, \dots, V_n)$, avec pour valeurs propres associées les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors les solutions de l'équation différentielle (matricielle)

$$X'(t) = AX(t)$$

s'écrivent sous la forme $t \mapsto X(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{\lambda_k t} V_k$, où $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille de scalaires.

- Définition du wronskien W d'un couple de solutions de l'équation différentielle linéaire scalaire (1') d'ordre 2, sur un intervalle I adéquat :

$$(1') \quad x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0.$$

Propriété : soient x_1 et x_2 deux solutions (quelconques) de l'équation homogène (1') sur I . Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) (x_1, x_2) est une base de solutions sur I de l'équation (1').
- (ii) $\forall t \in I, W(t) \neq 0$.
- (iii) $\exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0$.

- Résolution de l'équation différentielle $x''(t) + x(t) = \frac{1}{\cos^3 t}$ par la méthode de variation des (deux) constantes.
- Résolution de l'équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2 à **coefficient constants** :

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$$

en utilisant l'exponentielle matricielle.