Programme de colles n° 22 : colles du 16/03 au 20/03
Dernier programme de colle avant les écrits.

Algèbre générale : groupes.
— Groupes et sous-groupes;
— Groupe produit; sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$;
— Sous-groupe engendré par une partie;
— Groupe monogène, groupe cyclique;
— Morphisme de groupe, isomorphisme, image et noyau.
— Rappels dans $\mathbb{Z}$: divisibilité, décomposition en produit de facteurs premiers, congruence modulo n. Lemme de Gauss, théorème de Bézout.
— Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\overline{+})$: définition, structure de groupe cyclique;
— Classification des groupes monogènes.
— Ordre d'un élément; dans un groupe fini, l'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe.

Algèbre générale : anneaux, corps, idéaux (d'un anneau commutatif)
— Anneaux, sous-anneaux, produit fini d'anneaux. Exemples.
— Intégrité, formule du binôme pour deux éléments qui commutent.
— Groupe des inversibles d'un anneau.
— Corps; exemples.
— Idéaux d'un anneau commutatif : définition, exemples (en particulier dans $\mathbb{Z}$), idéal somme, idéal engendré par un élément [notation xA]).
— Lien entre divisibilité et idéaux. Pgcd et théorème de Bézout sur $\mathbb{Z}$.
— Morphisme d'anneaux, isomorphisme, image et noyau.
— Anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\overline{+},\overline{\times})$: définition, groupe des unités, indicatrice d'Euler.
— Théorème d'Euler. Cas particulier : petit théorème de Fermat.
— L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\overline{+},\overline{\times})$ est un corps si et seulement si n est premier.
— Congruences simultanées : théorème chinois.
— Exemples de résolutions de systèmes d'équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Questions de cours spécifiques du programme 22 (les démonstrations doivent être connues) :

- Calcul du pgcd de deux entiers et obtention d'une identité de Bézout par l'algorithme d'Euclide (sur un exemple au choix de l'examinatrice / l'examinateur).
- Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\bar{+})$ est cyclique, et ses générateurs sont les éléments de la forme $\bar{k}$ avec $k\in\mathbb{Z}$ premier avec n.
- L'ensemble des éléments inversibles d'un anneau forme un groupe pour la loi multiplicative de l'anneau. Détermination des inversibles de l'anneau produit $A=A_1\times A_2$: $\mathcal{U}(A)=\mathcal{U}(A_1)\times\mathcal{U}(A_2)$.
- En admettant le théorème chinois, calcul explicite de l'indicatrice d'Euler : si $n=p_1^{\alpha_1}\cdots {p_k}^{\alpha_k}\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$, est la décomposition en facteurs premiers de n, alors
$$\varphi(n)=p_1^{\alpha_1-1}\cdots p_k^{\alpha_k-1}\cdot\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)\ .$$
- Résoudre sur $\mathbb{Z}$ le système de congruences suivant : $\begin{cases} x &\equiv& 6 & [17] \\ x &\equiv& 4 & [15]. \end{cases}$
- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Démontrer les deux équivalences suivantes :
$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ intègre} \iff \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ corps} \iff n \text{ premier}\ .$$