DL n° 1 **(vacances d'été) pour le mardi 1er septembre 2026**

On attachera le plus grand soin à la rédaction. En particulier, les résultats seront $\boxed{\textit{encadrés}}$.

EXERCICE 1 (ALGÈBRE LINÉAIRE)

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille 3×3, à coefficients réels, et I_3 la matrice identité.
Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le but de cet exercice est de calculer, de plusieurs façons différentes, S^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer le noyau de s. En déduire que s est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$ et $e'_3 = (1, 1, -2)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer l'expression de la matrice S' de l'automorphisme s dans la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $(S')^n$ puis S^n.
3. (a) La famille (I_3, S) est-elle libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
   (b) Montrer que S^2 peut s'exprimer sous forme de combinaison linéaire de I_3 et S.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels tel que $S^n = a_n I_3 + b_n S$ (on convient que $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad M^0 = I_3$).
   (d) Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1, et exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   (e) Que dire des suites $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n + 1)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (f) En déduire l'expression de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comparer le résultat avec celui obtenu à la question 2.
4. Soit $B = S - 2I_3$.
   (a) Expliciter B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire l'expression de S^n en fonction de I_3 et B pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Comparer avec les résultats des questions 2 et 3.

EXERCICE 2 (PROBABILITÉS)

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion sur ces trois points.

À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve au point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

(i) le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ; plus précisément, il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.

(ii) pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement « le pion se trouve en A à l'étape n », B_n l'événement « le pion se trouve en B à l'étape n » et C_n l'événement « le pion se trouve en C à l'étape n ». On note également :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \mathbb{P}(A_n), \quad q_n = \mathbb{P}(B_n), \quad r_n = \mathbb{P}(C_n), \quad V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$

5. Calculer les nombres p_n, q_n et r_n pour $n = 0$ et $n = 1$.
6. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $V_{n+1} = MV_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans la suite de cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}.$$

7. En déduire l'expression de p_n, q_n et r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. Déterminer les limites respectives des suites (p_n), (q_n) et (r_n). Interpréter ces résultats.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 \text{ si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 \text{ si } \overline{A_n} \text{ est réalisé.} \end{cases}$$

9. Que représente la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} X_i$? En déduire une expression de a_n, puis un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.

On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante :

⋆ si le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = +\infty$;

⋆ sinon, T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

Nous allons déterminer la loi de T_B ainsi que son espérance.

10. Calculer $\mathbb{P}(T_B = 1)$ et $\mathbb{P}(T_B = 2)$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que

$$\mathbb{P}\left(B_{n+1} \;\middle|\; \bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}\right) = \mathbb{P}\left(B_{n+1} \;\middle|\; \overline{B_n}\right).$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\left(B_{n+1} \;\middle|\; \bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}\right) = \frac{1}{4}.$$

12. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\mathbb{P}(T_B > k)$ en fonction de $\mathbb{P}(T_B > k-1)$, puis en fonction de k.
13. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{P}(T_B = k)$, puis la valeur de $\mathbb{P}(T_B = +\infty)$.
14. (5/2) Préciser la loi de T_B, puis son espérance.

PROBLÈME (ANALYSE)

Partie I

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on pose :

$$a_{k,n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \binom{2n}{k}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_m = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^{\frac{m}{2}} \,\mathrm{d}t.$$

15. Montrer que la suite $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
16. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m.$$

17. Calculer I_1 à l'aide du changement de variable (de classe C^1) $t = \sin(\theta)$.
18. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}}, \qquad \text{et :} \quad I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n}.$$

19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$1 \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leqslant \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}.$$

En déduire que :

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2n}} \leqslant 2\pi \left(a_{n,n}\right)^2 \leqslant 1.$$

20. En déduire la convergence de la suite $(a_{n,n})_{n \geqslant 1}$ lorsque n tend l'infini, puis que :

$$I_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Partie II

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

21. (a) Montrer que f est une fonction impaire de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

    (b) Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) \leqslant 1 + \int_1^x e^{-t}\, dt$.

    (c) Démontrer que f admet une limite finie en $+\infty$ (pour le moment, on ne demande pas de calculer cette limite). Dans toute la suite du problème, on la notera ℓ.

22. (a) Montrer que pour tout réel u, on a $\mathrm{e}^u \geqslant 1 + u$.

    (b) Soit n un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\begin{cases} (1-u)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nu} & \text{pour tout} \quad u \leqslant 1 \\ \mathrm{e}^{-nu} \leqslant \frac{1}{(1+u)^n} & \text{pour tout} \quad u > -1. \end{cases}$$

    (c) Démontrer que pour tous entiers naturels n et N non nuls, on a :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^N \mathrm{e}^{-nx^2}\, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^N \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.$$

    (d) À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (qui est justifié car de classe C^1), montrer que

$$\int_0^N \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \int_0^{N/\sqrt{1+N^2}} (1-u^2)^{n-3/2}\, \mathrm{d}u.$$

    (e) Déduire des questions précédentes que pour tout $n \geqslant 2$:

$$I_{2n} \leqslant \frac{\ell}{\sqrt{n}} \leqslant I_{2n-4}.$$

23. Finalement, calculer ℓ.

Fin de l'énoncé