

Programme de colles n° 1 : colles du 7/9 au 11/9

Les exercices de cette première semaine porteront sur les nombres complexes, les formules de trigonométrie et les idéaux (définitions, idéaux dans $\mathbb{Z}$).

Chapitre introductif

- Ensembles, applications, familles.
- Relation d'équivalence, relation d'ordre, ensemble $\mathbb{N}$.
- Rappels sur les groupes, anneaux et corps.
- Idéal d'un anneau commutatif. Idéaux de $\mathbb{Z}$. Lien avec la divisibilité.
- Rappels sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$; racines n -èmes de l'unité.

Prévisions pour la semaine 2 : espaces vectoriels, matrices, polynômes.

Questions de cours spécifiques du programme 1 (les démonstrations doivent être connues) :

- Énoncer toute définition, tout théorème ou toute propriété du cours (sans démonstration).
- Calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kx + y)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kx + y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- Définition d'un idéal I d'un anneau commutatif A .
Si I et J sont deux idéaux de A , l'ensemble $I + J = \{a + b, (a, b) \in I \times J\}$ est un idéal de A (appelé idéal somme des idéaux I et J).
- (Exercice de cours) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note s_n le nombre de 1 dans l'écriture binaire de n et on pose

$$u_n = (-1)^{s_n} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = u_n$ et $u_{2n+1} = -u_n$.
2. Démontrer à l'aide d'une récurrence sur $\mathbb{N}$ que l'on a, pour tout entier $n \geq 0$:

$$S_{2n} = u_n \quad \text{et} \quad S_{2n+1} = 0.$$

- Propriété du cours :

$$d = \text{pgcd}(a, b) \iff a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z} \iff (d|a \text{ et } d|b \text{ et } \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2 / \lambda a + \mu b = d) .$$

- Racines n -èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Interprétation géométrique.