

Programme de colles n° 2 : colles du 14/09 au 18/09

Algèbre linéaire : espaces vectoriels et applications linéaires

- Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, espaces de suites et de fonctions); algèbres et sous-algèbres.
- Sous-espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels engendrés par une partie $A : \text{Vect}(A)$;
- Familles libres et génératrices, bases;
- Cas de la dimension finie n : dimension d'un espace vectoriel, conditions sur le cardinal d'une famille libre et sur celui d'une famille génératrice;
- **Somme et somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels (programme de deuxième année).**
- Formule de la dimension : $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$.
- Rang d'une famille de vecteurs; invariance du rang par opérations élémentaires sur les vecteurs;
- Base adaptée à une décomposition en somme directe;
- Applications linéaires : définition, caractérisation de l'injectivité avec le noyau, de la surjectivité avec l'image;
 - Une application linéaire est bijective si et seulement si elle envoie une base sur une base;
 - Existence et unicité d'une application linéaire définie sur une base;
 - Formule du rang et conséquence : en dimension finie, injectivité, surjectivité et bijectivité sont équivalentes.
- Polynômes interpolateurs de Lagrange : existence et unicité.
- Endomorphismes particuliers : homothéties, projecteurs, symétries; décomposition de l'espace en somme directe : $E = \ker p \oplus \text{Im } p$ pour un projecteur, $E = \ker(s - I_E) \oplus \ker(s + I_E)$ pour une symétrie.
- Formes linéaires et hyperplans.

Algèbre linéaire : matrices

- Matrice des composantes d'une famille de vecteurs, matrice d'une application linéaire;
- Produit de matrices; traduction en termes de composition d'endomorphismes.
- Matrice définie par blocs; produit par blocs;
- Transposée; traduction matricielle de la relation linéaire $y = f(x)$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$;
- Matrice de passage d'une base à une autre; changement de coordonnées;
- Matrices carrées : matrices diagonales et triangulaires; matrices nilpotentes; sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques;
- Rang d'une matrice : relations avec le rang d'une application linéaire, d'un système de vecteurs.
Les matrices A et A^T ont même rang.
- Matrices inversibles : le groupe $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$.
- Matrices semblables.
- Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme :
 - L'application trace est une forme linéaire;
 - $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$; deux matrices semblables ont la même trace;
 - la trace d'un projecteur est égale à son rang.

Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- Définition rigoureuse et identification lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Opérations sur les polynômes, degré, division euclidienne; idéaux de $\mathbb{K}[X]$.
- Structure de $\mathbb{K}$ -algèbre de $\mathbb{K}[X]$; les sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$.
- Dérivation formelle - lien avec la dérivée en analyse; formule de Taylor.
- Racines, ordre de multiplicité, polynômes scindés; somme et produit des racines pour un polynôme scindé.
- Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, dans $\mathbb{C}[X]$.
- Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$, dans $\mathbb{C}[X]$.

Prévisions pour la semaine 3 : arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$, polynômes d'endomorphismes, polynôme minimal, déterminants.

Questions de cours spécifiques du programme 2 (sauf mention contraire, les démonstrations doivent être connues) :

- Exercice de cours : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$. Montrer qu'il existe $A \geq 0$ (que l'on déterminera en fonction de a et b) et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = A \cos(x + \theta)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (Banque CCINP 87)
Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n + 1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \dots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i.$$

2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Expliciter ce polynôme P , que l'on notera L_k , lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

3. Prouver que $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.

- On rappelle qu'un hyperplan d'un espace vectoriel E (de dimension finie ou pas) est un sous-espace H de E qui est le noyau d'une forme linéaire φ non nulle.
Montrer que si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H , alors $E = H \oplus D$.
- Formule $E_{ij} \cdot E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$ pour les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Les matrices carrées qui commutent avec toutes les autres matrices sont les matrices scalaires.
- Exercice de cours : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 1. Établir que $\text{rg} A = 1$ si et seulement s'il existe une matrice L non nulle de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et une matrice C non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que : $A = CL$.
 2. Si $\text{rg} A = 1$, montrer que $A^2 = (\text{tr} A)A$.
- Décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. Application au polynôme $X^4 + 1$.