Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Annexe 1
Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **scientifique**

Voie : **Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI)**

Discipline : **Mathématiques**

Première année

Classe préparatoire MPSI
Programme de mathématiques

Table des matières

Le programme de mathématiques de MPSI s'inscrit entre deux continuités : en amont avec les programmes rénovés du lycée, en aval avec les enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études universitaires. Il est conçu pour amener progressivement tous les étudiants au niveau requis pour poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant, de scientifique, et aussi pour leur permettre de se former tout au long de la vie.
Le programme du premier semestre est conçu de façon à viser trois objectifs majeurs :
- assurer la progressivité du passage aux études supérieures, en tenant compte des nouveaux programmes du cycle terminal de la filière S, dont il consolide et élargit les acquis ;
- consolider la formation des étudiants dans les domaines de la logique, du raisonnement et des techniques de calcul, qui sont des outils indispensables tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines scientifiques ;
- présenter des notions nouvelles riches, de manière à susciter l'intérêt des étudiants.

Objectifs de formation

La formation mathématique en classe préparatoire scientifique vise deux objectifs :
- l'acquisition d'un solide bagage de connaissances et de méthodes permettant notamment de passer de la perception intuitive de certaines notions à leur appropriation, afin de pouvoir les utiliser à un niveau supérieur, en mathématiques et dans les autres disciplines. Ce degré d'appropriation suppose la maîtrise du cours, c'est-à-dire des définitions, énoncés et démonstration des théorèmes figurant au programme ;
- le développement de compétences utiles aux scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs ou enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour les résoudre, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe.

Pour répondre à cette double exigence, et en continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires définissent un corpus de connaissances et de capacités, et explicitent six grandes compétences qu'une activité mathématique bien conçue permet de développer :
- **s'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer à l'écrit et à l'oral** : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

S'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation, TIPE) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités.

La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension-même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et illustrent certains résultats d'analyse.
Selon Galilée, fondateur de la science expérimentale, le grand livre de la nature est écrit en langage mathématique. Il n'est donc pas surprenant que les mathématiques interagissent avec des champs de connaissances partagés par d'autres disciplines. La globalité et la complexité du réel exigent le croisement des regards disciplinaires. Aussi le programme valorise-t-il l'interprétation des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie et des probabilités en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques (mouvement, vitesse et accélération, signaux continus ou discrets, mesure de grandeurs, incertitudes...)

La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

Architecture et contenu du programme

L'année est découpée en deux semestres. À l'intérieur de chaque semestre, un équilibre est réalisé entre les différents champs du programme : analyse, algèbre, géométrie. S'y ajoute, au deuxième semestre, une introduction limitée d'un enseignement de probabilités visant à consolider les notions figurant dans le programme de Terminale S et à préparer celles qui seront ultérieurement introduites dans les grandes écoles ou les universités.
L'étude de chaque domaine permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des liens avec les autres disciplines, et de nourrir les thèmes susceptibles d'être abordés lors des TIPE.

En cohérence avec l'introduction d'un enseignement d'algorithmique au lycée, le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes qui doivent être connus et pratiqués par les étudiants. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces euclidiens, les fonctions de variable réelle. Les notions de géométrie affine et euclidienne étudiées au lycée sont reprises dans un cadre plus général.

Le programme d'algèbre comprend deux volets. Le premier est l'étude de l'arithmétique des entiers relatifs et des polynômes à une indéterminée. Le second, nettement plus volumineux, est consacré aux notions de base de l'algèbre linéaire, pour laquelle un équilibre est réalisé entre les points de vue géométrique et numérique. Il importe de souligner le caractère général des méthodes linéaires, notamment à travers leurs interventions en analyse et en géométrie.

Le programme d'analyse est centré autour des concepts fondamentaux de fonction et de suite. Les interactions entre les aspects discret et continu sont mises en valeur. Le programme d'analyse combine l'étude de problèmes qualitatifs et quantitatifs, il développe conjointement l'étude du comportement global de suite ou de fonction avec celle de leur comportement local ou asymptotique. À ce titre, les méthodes de l'analyse asymptotique font l'objet d'un chapitre spécifique, qui est exploité ultérieurement dans l'étude des séries. Pour l'étude des solutions des équations, le programme allie les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact et les méthodes d'approximation.

La pratique de calculs simples permet aux étudiants de s'approprier de manière effective les notions du programme. Le choix a donc été fait d'introduire très tôt un module substantiel visant à consolider les pratiques de calcul (dérivation des fonctions, calcul de primitives, résolution de certains types d'équations différentielles). Les théories sous-jacentes sont étudiées ultérieurement, ce qui doit en faciliter l'assimilation.
Les étudiants doivent savoir mettre en œuvre directement (c'est-à-dire sans recourir à un instrument de calcul), sur des exemples simples, un certain nombre de méthodes de calcul, mais aussi connaître leur cadre d'application et la forme des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

L'enseignement des probabilités se place dans le cadre des univers finis. Il a vocation à interagir avec le reste du programme. La notion de variable aléatoire permet d'aborder des situations réelles nécessitant une modélisation probabiliste.

Le volume global du programme a été conçu pour libérer des temps dédiés à une mise en activité effective des étudiants, quel que soit le contexte proposé (cours, travaux dirigés, TIPE).

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.
À l'intérieur de chaque semestre, le programme est décliné en chapitres. Chaque chapitre comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. À l'intérieur de chaque semestre, le professeur conduit en toute liberté, dans le respect de la cohérence de la formation globale, l'organisation de son enseignement et le choix de ses méthodes. En particulier, la chronologie retenue dans la présentation des différents chapitres de chaque semestre ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue au cours du premier semestre doit respecter les

objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période. Ces objectifs sont détaillés dans le bandeau qui suit le titre « Premier semestre ».
Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :
- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents chapitres ;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux ou dans la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit en particulier des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme.

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.
Afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les autres disciplines scientifiques.
Les liens avec les disciplines scientifiques et technologiques sont identifiés par le symbole ⇆PC pour la physique et la chimie, ⇆ SI pour les sciences industrielles de l'ingénieur et ⇆ I pour l'informatique.
On pourra aussi se reporter à l'appendice aux programmes *Outils mathématiques pour la physique-chimie*.

Usage de la liberté pédagogique

Dans le cadre de la liberté pédagogique qui lui est reconnue par la loi, le professeur choisit ses méthodes, sa progression, ses problématiques. Il peut organiser son enseignement en respectant deux grands principes directeurs :
- pédagogue, il privilégie la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. La pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative et l'autonomie des étudiants. Le choix des problématiques et des méthodes de résolution favorise cette mise en activité ;
- didacticien, il choisit le contexte favorable à l'acquisition des connaissances et au développement des compétences. La mise en perspective d'une problématique avec l'histoire des sociétés, des sciences et des techniques, mais aussi des questions d'actualité ou des débats d'idées, permet de motiver son enseignement.

Premier semestre

Le premier semestre vise deux objectifs majeurs :

• aménager un passage progressif de la classe de Terminale à l'enseignement supérieur en commençant par renforcer et approfondir les connaissances des bacheliers. À ce titre, le chapitre « Raisonnement et vocabulaire ensembliste » regroupe des notions de logique et d'algèbre générale dont la plupart ont été mises en place au lycée. Il s'agit de les consolider et de les structurer afin qu'elles soient maîtrisées par les étudiants à la fin du premier semestre. Ce chapitre n'a pas vocation à être enseigné d'un seul tenant et en tout début de semestre. Le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse » est axé sur la pratique des techniques de l'analyse réelle, basée sur l'application de théorèmes qui sont admis à ce stade ;

• susciter la curiosité et l'intérêt des étudiants en leur présentant un spectre suffisamment large de problématiques et de champs nouveaux. Les chapitres « Nombres réels et suites numériques », et « Limites, continuité, dérivabilité » instaurent les fondements de l'analyse réelle. Y sont en particulier démontrés les théorèmes qui justifient les techniques présentées dans le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse ». Par la possibilité qu'il offre de combiner beaucoup d'idées et de techniques étudiées au cours du premier semestre, le chapitre « Polynômes et fractions rationnelles » peut constituer un objet d'étude pertinent pour la fin du semestre.
Les ensembles de nombres usuels $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont supposés connus.

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Ce chapitre regroupe les différents points de vocabulaire, notations et raisonnement nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique. Ces notions doivent être introduites de manière progressive en vue d'être acquises en fin de premier semestre.
Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Rudiments de logique	
Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviations est exclu.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par récurrence (faible et forte), par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	On pourra relier le raisonnement par récurrence au fait que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme. Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
b) Ensembles	
Ensemble, appartenance, inclusion. Sous-ensemble (ou partie).	Ensemble vide.
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, passage au complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et $\complement_E^A$ pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathscr{P}(E)$.
c) Applications et relations	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathscr{F}(E,F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Compatibilité de la notation f^{-1} avec la notation d'une image réciproque.
Relation binaire sur un ensemble.	
Relation d'équivalence, classes d'équivalence.	La notion d'ensemble quotient est hors programme.
Relations de congruence modulo un réel sur $\mathbb{R}$, modulo un entier sur $\mathbb{Z}$.	
Relation d'ordre. Ordre partiel, total.	

Calculs algébriques

Ce chapitre a pour but de présenter quelques notations et techniques fondamentales de calcul algébrique.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Sommes et produits	
Somme et produit d'une famille finie de nombres complexes.	Notations $\sum_{i\in I} a_i, \sum_{i=1}^{n} a_i, \prod_{i\in I} a_i, \prod_{i=1}^{n} a_i$. Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.
Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k, \sum_{k=1}^{n} k^2, \sum_{k=0}^{n} x^k$.	
Factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.	
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies, sommes triangulaires.	
b) Coefficients binomiaux et formule du binôme	
Factorielle. Coefficients binomiaux.	Notation $\binom{n}{p}$.
Relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.	
Formule et triangle de Pascal.	Lien avec la méthode d'obtention des coefficients binomiaux utilisée en Première (dénombrement de chemins).
Formule du binôme dans $\mathbb{C}$.	
c) Systèmes linéaires	
Système linéaire de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	⇆ PC et SI dans le cas $n = p = 2$. Interprétation géométrique : intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$, de plans dans $\mathbb{R}^3$.
Système homogène associé. Structure de l'ensemble des solutions.	
Opérations élémentaires.	Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \neq 0)$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
Algorithme du pivot.	⇆ I : pour des systèmes de taille $n > 3$ ou $p > 3$, on utilise l'outil informatique.

Nombres complexes et trigonométrie

L'objectif de ce chapitre est de consolider et d'approfondir les notions sur les nombres complexes acquises en classe de Terminale. Le programme combine les aspects suivants :
- l'étude algébrique du corps $\mathbb{C}$, équations algébriques (équations du second degré, racines n-ièmes d'un nombre complexe) ;
- l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;
- l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.
Il est recommandé d'illustrer le cours par de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire.	La construction de $\mathbb{C}$ n'est pas exigible.
Opérations sur les nombres complexes.	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations.	
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct.
b) Module	
Module.	Interprétation géométrique de $\lvert z-z'\rvert$, cercles et disques.
Relation $\lvert z\rvert^2 = z\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient.	
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Cercle trigonométrique. Paramétrisation par les fonctions circulaires.	Notation U. Les étudiants doivent savoir retrouver les formules du type $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et résoudre des équations et inéquations trigonométriques en s'aidant du cercle trigonométrique.
Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme.	
Formules de trigonométrie exigibles : $\cos(a\pm b)$, $\sin(a\pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\cos a \cos b$, $\sin a \cos b$, $\sin a \sin b$.	Les étudiants doivent savoir factoriser des expressions du type $\cos(p)+\cos(q)$.
Fonction tangente.	La fonction tangente n'a pas été introduite au lycée. Notation tan.
Formule exigible : $\tan(a \pm b)$.	
Formules d'Euler.	Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$, de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
d) Formes trigonométriques	
Forme trigonométrique $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.	Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.
Factorisation de $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.	
Transformation de $a\cos t + b \sin t$ en $A\cos(t-\varphi)$.	$\leftrightarrows$ PC et SI : amplitude et phase.
e) Équations du second degré	
Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
Somme et produit des racines.	
f) Racines n-ièmes	
Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.

Contenus	Capacités & Commentaires
g) Exponentielle complexe	
Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$.	Notations $\exp(z)$, e^z. ⇆ PC et SI : définition d'une impédance complexe en régime sinusoïdal.
Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.	
h) Interprétation géométrique des nombres complexes	
Interprétation géométrique du module et de l'argument de $\dfrac{c-b}{c-a}$.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$.	Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.
Interprétation géométrique de la conjugaison.	L'étude générale des similitudes indirectes est hors programme.

Techniques fondamentales de calcul en analyse

Le point de vue adopté dans ce chapitre est principalement pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre des techniques de l'analyse, en particulier celles de majoration. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul différentiel ou intégral utilisées sont différées à un chapitre ultérieur. Cette appropriation en deux temps est destinée à faciliter les apprentissages.
Les objectifs de formation sont les suivants :

- *une bonne maîtrise des automatismes et du vocabulaire de base relatifs aux inégalités ;*
- *l'introduction de fonctions pour établir des inégalités ;*
- *la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;*
- *le calcul de dérivées et de primitives ;*
- *la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable ;*
- *l'application des deux points précédents aux équations différentielles.*

Les étudiants doivent connaître les principales techniques de calcul et savoir les mettre en pratique sur des cas simples. Le cours sur les équations différentielles est illustré par des exemples issus des autres disciplines scientifiques.

A - Inégalités dans $\mathbb{R}$

Contenus	Capacités & commentaires
Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients.
Parties positive et négative d'un réel. Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	Notations x^+, x^-.
Intervalles de $\mathbb{R}$.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $\lvert x - a\rvert \leqslant b$.
Parties majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant ; maximum, minimum.	

B - Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition. Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Graphes des fonctions $x \mapsto f(x)+a$, $x \mapsto f(x+a)$, $x \mapsto f(a-x)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$. Résolution graphique d'équations et d'inéquations du type $f(x)=\lambda$ et $f(x) \geqslant \lambda$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés.
Somme, produit, composée. Monotonie (large et stricte).	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. Une fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f \rvert$ est majorée.
b) Dérivation	
Équation de la tangente en un point.	
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont admis à ce stade. ⇆ SI : étude cinématique. ⇆ PC : exemples de calculs de dérivées partielles. À ce stade, toute théorie sur les fonctions de plusieurs variables est hors programme.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.	Résultats admis à ce stade. Les étudiants doivent savoir introduire des fonctions pour établir des inégalités.
Tableau de variation. Graphe d'une réciproque.	
Dérivée d'une réciproque.	Interprétation géométrique de la dérivabilité et du calcul de la dérivée d'une bijection réciproque.
Dérivées d'ordre supérieur.	
c) Étude d'une fonction	
Détermination des symétries et des périodicités afin de réduire le domaine d'étude, tableau de variations, asymptotes verticales et horizontales, tracé du graphe.	Application à la recherche d'extremums et à l'obtention d'inégalités.
d) Fonctions usuelles	
Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variation et graphe. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. ⇆ SI : logarithme décimal pour la représentation des diagrammes de Bode.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	
Fonctions sinus, cosinus, tangente.	⇆ PC et SI.
Fonctions circulaires réciproques.	Notations Arcsin, Arccos, Arctan.
Fonctions hyperboliques.	Notations sh, ch, th. Seule relation de trigonométrie hyperbolique exigible : $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.
e) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle	
Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.	La dérivée est définie par ses parties réelle et imaginaire.

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient. Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles. ⇆ PC et SI : électrocinétique.

C - Primitives et équations différentielles linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. Les étudiants doivent savoir utiliser les primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour calculer celles de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$. ⇆ PC et SI : cinématique.
Primitives des fonctions puissances, trigonométriques et hyperboliques, exponentielle, logarithme, $$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $$x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Dérivée de $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est continue.	Résultat admis à ce stade.
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.	
Intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Changement de variable : si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors pour tous a et b dans I $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$	On définit à cette occasion la classe $\mathscr{C}^1$. Application au calcul de primitives.
b) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Notion d'équation différentielle linéaire du premier ordre : $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
Résolution d'une équation homogène.	
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	⇆ PC : régime libre, régime forcé ; régime transitoire, régime établi.
Principe de superposition. Méthode de la variation de la constante.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	⇆ PC et SI : modélisation de circuits électriques RC, RL ou de systèmes mécaniques linéaires.

Contenus	Capacités & commentaires
c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Notion d'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	Équation homogène associée.
Résolution de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A,\lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B,\omega) \in \mathbb{R}^2$. ⇆ PC : régime libre, régime forcé ; régime transitoire, régime établi.
Principe de superposition.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme. ⇆ PC et SI : modélisation des circuits électriques LC, RLC et de systèmes mécaniques linéaires.

Nombres réels et suites numériques

L'objectif de ce chapitre est de fonder rigoureusement le cours d'analyse relatif aux propriétés des nombres réels. Il convient d'insister sur l'aspect fondateur de la propriété de la borne supérieure.
Dans l'étude des suites, on distingue les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).
Il convient de souligner l'intérêt des suites, tant du point de vue pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximation de nombres réels).

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	La construction de $\mathbb{R}$ est hors programme.
Partie entière.	Notation $\lfloor x \rfloor$.
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès. ⇆ I : représentation des réels en machine.
Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.	
b) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$. Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a,b] \subset X$.	
c) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\big(\lvert u_n\rvert\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
d) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Pour $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, notation $u_n \longrightarrow \ell$. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Lien avec la définition vue en Terminale.

Contenus	Capacités & Commentaires
Unicité de la limite. Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée. Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient. Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.	Notation $\lim u_n$. Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.

e) Suites monotones

Théorème de la limite monotone : toute suite monotone possède une limite. Théorème des suites adjacentes.	Toute suite croissante majorée converge, toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

f) Suites extraites

Suite extraite. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite. Théorème de Bolzano-Weierstrass.	 Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ. Les étudiants doivent connaître le principe de la démonstration par dichotomie, mais la formalisation précise n'est pas exigible. La notion de valeur d'adhérence est hors programme.

g) Traduction séquentielle de certaines propriétés

Partie dense de $\mathbb{R}$.	Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide. Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.
Caractérisation séquentielle de la densité. Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).	

h) Suites complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	La démonstration n'est pas exigible.

i) Suites particulières

Suite arithmétique, géométrique. Suite arithmético-géométrique. Suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.	Les étudiants doivent savoir déterminer une expression du terme général de ces suites.
Exemples de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.	Seul résultat exigible : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

Limites, continuité, dérivabilité

Ce chapitre est divisé en deux parties, consacrées aux limites et à la continuité pour la première, au calcul différentiel pour la seconde.

Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et, sauf dans les paragraphes A-e) et B-f), sont à valeurs réelles.

Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré sur a si a est réel, avec un intervalle $[A,+\infty[$ si $a=+\infty$, avec un intervalle $]-\infty, A]$ si $a=-\infty$.

A - Limites et continuité

Le paragraphe a) consiste largement en des adaptations au cas continu de notions déjà abordées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de pouvoir disposer d'outils efficaces (développements limités).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Limite d'une fonction en un point	
Étant donné un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Si f possède une limite finie en a, f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Extension de la notion de limite en a lorsque f est définie sur $I\setminus\{a\}$. Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie). Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite $+\infty$), de majoration (limite $-\infty$). Théorème de la limite monotone.	
b) Continuité	
Continuité, prolongement par continuité en un point. Continuité à gauche, à droite. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Continuité sur un intervalle.	
c) Image d'un intervalle par une fonction continue	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Cas d'une fonction strictement monotone. ⇆ I : application de l'algorithme de dichotomie à la recherche d'un zéro d'une fonction continue.
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.	
d) Image d'un segment par une fonction continue	
Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration n'est pas exigible.

Contenus	Capacités & Commentaires
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.	

e) Continuité et injectivité

Toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone. La réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle est continue.	La démonstration n'est pas exigible.

f) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide de parties réelle et imaginaire.

B - Dérivabilité

Contenus	Capacités & commentaires

a) Nombre dérivé, fonction dérivée

Dérivabilité en un point, nombre dérivé.	Développement limité à l'ordre 1. Interprétation géométrique. ⇆ SI : identification d'un modèle de comportement au voisinage d'un point de fonctionnement. ⇆ SI : représentation graphique de la fonction sinus cardinal au voisinage de 0. ⇆ I : méthode de Newton.
La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite. Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.	
Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une réciproque.

b) Extremum local et point critique

Extremum local. Condition nécessaire en un point intérieur	Un point critique est un zéro de la dérivée.

c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème de Rolle.	Utilisation pour établir l'existence de zéros d'une fonction.
Égalité des accroissements finis.	Interprétations géométrique et cinématique.
Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\lvert f'\rvert$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.	La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.	
Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.	Interprétation géométrique. Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et f' est continue en a.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Fonctions de classe C^k	
Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque. Théorème de classe $\mathscr{C}^k$ par prolongement : si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$ et si $f^{(i)}(x)$ possède une limite finie lorsque x tend vers a pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, alors f admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.
e) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Le résultat, admis à ce stade, sera justifié dans le chapitre « Intégration ».

Analyse asymptotique

L'objectif de ce chapitre est de familiariser les étudiants avec les techniques asymptotiques de base, dans les cadres discret et continu. Les suites et les fonctions y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant.
On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.
Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir rapidement mener à bien des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Relations de comparaison : cas des suites	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$. On définit ces relations à partir du quotient $\frac{u_n}{v_n}$ sous l'hypothèse que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées des suites de termes généraux $\ln^\beta(n)$, n^α, $e^{\gamma n}$.
Liens entre les relations de comparaison. Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	Équivalence des relations $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$.
b) Relations de comparaison : cas des fonctions	
Adaptation aux fonctions des définitions et résultats précédents.	
c) Développements limités	
Développement limité, unicité des coefficients, troncature.	Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire.
Forme normalisée d'un développement limité : $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\big(a_0+a_1h+\ldots+a_nh^n+o(h^n)\big)$ avec $a_0 \neq 0$.	Équivalence $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0h^p$; signe de f au voisinage de a.

Contenus	Capacités & Commentaires
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	Utilisation de la forme normalisée pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible. La division selon les puissances croissantes est hors programme.
Primitivation d'un développement limité.	
Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre n en un point d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	La formule de Taylor-Young peut être admise à ce stade et justifiée dans le chapitre « Intégration ».
Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, Arctan, et de tan à l'ordre 3.	
Utilisation des développements limités pour préciser l'allure d'une courbe au voisinage d'un point.	Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local.
d) Exemples de développements asymptotiques	
	La notion de développement asymptotique est présentée sur des exemples simples. La notion d'échelle de comparaison est hors programme.
Formule de Stirling.	La démonstration n'est pas exigible.

Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés de la divisibilité des entiers et des congruences.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples.	Caractérisation des couples d'entiers associés.
Théorème de la division euclidienne.	
b) PGCD et algorithme d'Euclide	
PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul.	Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{N}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b. Notation $a \wedge b$.
Algorithme d'Euclide.	L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$. $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
Extension au cas de deux entiers relatifs.	
Relation de Bézout.	L'algorithme d'Euclide fournit une relation de Bézout. ⇆ I : algorithme d'Euclide étendu. L'étude des idéaux de $\mathbb{Z}$ est hors programme.
PPCM.	Notation $a \vee b$. Lien avec le PGCD.
c) Entiers premiers entre eux	
Couple d'entiers premiers entre eux.	
Théorème de Bézout.	Forme irréductible d'un rationnel.
Lemme de Gauss.	

Contenus	Capacités & Commentaires
PGCD d'un nombre fini d'entiers, relation de Bézout. Entiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	
d) Nombres premiers	
Nombre premier.	⥃ I : crible d'Eratosthène.
L'ensemble des nombres premiers est infini.	
Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.	
Pour p premier, valuation p-adique.	Notation $v_p(n)$. Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p-adiques. Expressions du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations p-adiques.
e) Congruences	
Relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$.	Notation $a \equiv b\ [n]$.
Opérations sur les congruences : somme, produit.	Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont hors programme.
Petit théorème de Fermat.	

Structures algébriques usuelles

Le programme, strictement limité au vocabulaire décrit ci-dessous, a pour objectif de permettre une présentation unifiée des exemples usuels. En particulier, l'étude de lois artificielles est exclue.
La notion de sous-groupe figure dans ce chapitre par commodité. Le professeur a la liberté de l'introduire plus tard.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Lois de composition internes	
Loi de composition interne.	
Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité.	Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
Partie stable.	
b) Structure de groupe	
Groupe.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif. Exemples usuels : groupes additifs $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$.
Groupe des permutations d'un ensemble.	Notation S_X.
Sous-groupe : définition, caractérisation.	
c) Structures d'anneau et de corps	
Anneau, corps.	Tout anneau est unitaire, tout corps est commutatif. Exemples usuels : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
Calcul dans un anneau.	Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
Groupe des inversibles d'un anneau.	

Polynômes et fractions rationnelles

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés de base de ces objets formels et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.
L'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ est développée selon le plan déjà utilisé pour l'arithmétique de $\mathbb{Z}$, ce qui autorise un exposé allégé. D'autre part, le programme se limite au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Anneau des polynômes à une indéterminée	
Anneau $\mathbb{K}[X]$.	La contruction de $\mathbb{K}[X]$ n'est pas exigible. Notations $\sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$.
Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.	Le degré du polynôme nul est $-\infty$. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.
Degré d'une somme, d'un produit. Composition.	Le produit de deux polynômes non nuls est non nul. ⇆ I : représentation informatique d'un polynôme ; somme, produit.
b) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.	Caractérisation des couples de polynômes associés. ⇆ I : algorithme de la division euclidienne.
c) Fonctions polynomiales et racines	
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.	
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.	Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
Multiplicité d'une racine.	Si $P(\lambda) \neq 0$, λ est racine de P de multiplicité 0.
Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines.	Aucune connaissance spécifique sur le calcul des fonctions symétriques des racines n'est exigible.
d) Dérivation	
Dérivée formelle d'un polynôme.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	
e) Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	
PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul. Algorithme d'Euclide.	Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B. L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de A et B sont associés ; un seul est unitaire. On le note $A \wedge B$.
Relation de Bézout.	L'algorithme d'Euclide fournit une relation de Bézout. ⇆ I : algorithme d'Euclide étendu. L'étude des idéaux de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.
PPCM.	Notation $A \vee B$. Lien avec le PGCD.
Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss.	

Contenus	Capacités & Commentaires
PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	
f) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	
Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	La démonstration est hors programme. Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
g) Formule d'interpolation de Lagrange	
Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \ldots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un et un seul $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que pour tout i : $\quad P(x_i) = y_i$.	Expression de P. Description des polynômes Q tels que pour tout i : $Q(x_i) = y_i$.
h) Fractions rationnelles	
Corps $\mathbb{K}(X)$. Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle. Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.	La construction de $\mathbb{K}(X)$ n'est pas exigible.
i) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$	
Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. Si λ est un pôle simple, coefficient de $\dfrac{1}{X-\lambda}$. Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.	La démonstration est hors programme. On évitera toute technicité excessive. La division selon les puissances croissantes est hors programme.

Deuxième semestre

Le programme du deuxième semestre est organisé autour de trois objectifs :
– introduire les notions fondamentales relatives à l'algèbre linéaire et aux espaces préhilbertiens ;
– prolonger les chapitres d'analyse du premier semestre par l'étude de l'intégration sur un segment et des séries numériques, et achever ainsi la justification des résultats admis dans le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse » ;
– consolider les notions relatives aux probabilités sur un univers fini introduites au lycée et enrichir le corpus des connaissances sur les variables aléatoires définies sur un tel univers.

Le professeur a la liberté d'organiser l'enseignement du semestre de la manière qui lui semble la mieux adaptée.

Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans tout le cours d'algèbre linéaire, le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Le programme d'algèbre linéaire est divisé en deux chapitres d'importance comparable, intitulés « Algèbre linéaire I » et « Algèbre linéaire II ». Le premier privilégie les objets géométriques : espaces, sous-espaces, applications linéaires. Le second est consacré aux matrices. Cette séparation est une commodité de rédaction. Le professeur a la liberté d'organiser l'enseignement de l'algèbre linéaire de la manière qu'il estime la mieux adaptée.

Les objectifs du chapitre « Espaces vectoriels et applications linéaires » sont les suivants :
– *acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire ;*
– *reconnaître les problèmes linéaires et les modéliser à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;*
– *définir la notion de dimension, qui interprète le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; il convient d'insister sur les méthodes de calcul de dimension, de faire apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentations : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires ;*
– *présenter un certain nombre de notions de géométrie affine, de manière à consolider et enrichir les acquis relatifs à la partie affine de la géométrie classique du plan et de l'espace.*

Il convient de souligner, à l'aide de nombreuses figures, comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à la dimension quelconque.

A - Espaces vectoriels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel. Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$. Espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$. On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation. Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une partie X.	Sous-espace nul. Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$. Notations $\mathrm{Vect}(X)$, $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace contenant X contient $\mathrm{Vect}(X)$.
c) Familles de vecteurs	
Familles et parties génératrices. Familles et parties libres, liées. Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$.
d) Somme d'un nombre fini de sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces. Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.

Contenus	Capacités & Commentaires
Sous-espaces supplémentaires. Somme d'un nombre fini de sous-espaces. Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces. Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.	La somme $F_1+\dots+F_p$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F_1+\dots+F_p$ sous la forme $x_1+\dots+x_p$ avec $x_i \in F_i$ est unique.

B - Espaces de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\dots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice on peut extraire une base. Théorème de la base incomplète : toute famille libre peut être complétée en une base.
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimensions de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
En dimension n, une famille de n vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, si et seulement si elle est génératrice. Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$.
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	Sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire.	Dimension commune des supplémentaires.
Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe d'un nombre fini de sous-espaces. Dimension d'une somme de deux sous-espaces ; formule de Grassmann. Caractérisation des couples de sous-espaces supplémentaires. Si $F_1,\dots,F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors : $\dim \sum_{i=1}^{p} F_i \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.	

C - Applications linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition, réciproque. Isomorphismes. Image et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire. Noyau d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(x_i), i \in I)$. Image d'une base par un isomorphisme.	L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel. Bilinéarité de la composition.
Application linéaire de rang fini, rang. Invariance par composition par un isomorphisme.	Notation $\operatorname{rg}(u)$.
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties. Anneau $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$.	Notation Id_E. Non commutativité si $\dim E \geqslant 2$. Notation vu pour la composée $v \circ u$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation des endomorphismes vérifiant $p^2 = p$ et $s^2 = \mathrm{Id}$.	
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}(E)$.
c) Détermination d'une application linéaire	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une et une seule application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout $i \in I$: $u(e_i) = f_i$. Classification, à isomorphisme près, des espaces de dimension finie par leur dimension. Une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Un endomorphisme d'un espace de dimension finie est inversible à gauche si et seulement s'il est inversible à droite. Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie. Si $E_1,\dots,E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et si $u_i \in \mathscr{L}(E_i,F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u_{\mid E_i} = u_i$ pour tout i.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
d) Théorème du rang	
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$. Théorème du rang : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg}(u)$.	
e) Formes linéaires et hyperplans	
Forme linéaire. Hyperplan.	Formes coordonnées relativement à une base. Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

Contenus	Capacités & Commentaires
Si H est un hyperplan de E, alors pour toute droite D non contenue dans H : $E = H \oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.	En dimension n, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.
Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.	
Si E est un espace de dimension finie n, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.	Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. L'étude de la dualité est hors programme.

D - Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Le but de cette partie est double :
- *montrer comment l'algèbre linéaire permet d'étendre les notions de géométrie affine étudiées au collège et au lycée et d'utiliser l'intuition géométrique dans un cadre élargi.*
- *modéliser un problème affine par une équation $u(x) = a$ où u est une application linéaire, et unifier plusieurs situations de ce type déjà rencontrées.*

Cette partie du cours doit être illustrée par de nombreuses figures.

Contenus	Capacités & commentaires
Présentation informelle de la structure affine d'un espace vectoriel : points et vecteurs.	L'écriture $B = A + \vec{u}$ est équivalente à la relation $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
Translation.	
Sous-espace affine d'un espace vectoriel, direction. Hyperplan affine.	Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Intersection de sous-espaces affines.	
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = a$ d'inconnue x est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\operatorname{Ker} u$.	Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2 et la recherche de polynômes interpolateurs. La notion d'application affine est hors programme.
Repère affine, coordonnées.	

Matrices

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :
- *introduire les matrices et le calcul matriciel ;*
- *présenter les liens entre applications linéaires et matrices, de manière à exploiter les changements de registres (géométrique, numérique, formel) ;*
- *étudier l'effet d'un changement de bases sur la représentation matricielle d'une application linéaire et la relation d'équivalence qui s'en déduit sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$;*
- *introduire brièvement la relation de similitude sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$;*
- *étudier les opérations élémentaires et les systèmes linéaires.*

A - Calcul matriciel

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces de matrices	
Espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.	
Base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	Dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
b) Produit matriciel	
Bilinéarité, associativité.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Produit d'une matrice de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice de la base canonique de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	
Anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro et de matrices nilpotentes.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
c) Transposition	
Transposée d'une matrice.	Notations ${}^tA$, A^{T}.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit, inverse.	

B - Matrices et applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases.	Notation $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$. Isomorphisme $u \mapsto \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$.
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes.
b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice	
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul.
Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. L'inverse d'une matrice triangulaire est une matrice triangulaire.	
d) Blocs	
Matrice par blocs.	Interprétation géométrique.
Théorème du produit par blocs.	La démonstration n'est pas exigible.

C - Changements de bases, équivalence et similitude

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre.	La matrice de passage $P_e^{e'}$ de e à e' est la matrice de la famille e' dans la base e. Inversibilité et inverse de $P_e^{e'}$.
Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire.	
b) Matrices équivalentes et rang	
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang r, il existe une base e de E et une base f de F telles que : $\operatorname{Mat}_{e,f}(u) = J_r$. Matrices équivalentes. Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r. Invariance du rang par transposition. Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.	La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1. Interprétation géométrique. Classification des matrices équivalentes par le rang.
c) Matrices semblables et trace	
Matrices semblables. Trace d'une matrice carrée.	Interprétation géométrique.
Linéarité de la trace, relation $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, invariance par similitude.	Notations $\operatorname{tr}(A)$, $\operatorname{Tr}(A)$.
Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\operatorname{tr}(uv) = \operatorname{tr}(vu)$.	Notations $\operatorname{tr}(u)$, $\operatorname{Tr}(u)$. Trace d'un projecteur.

D - Opérations élémentaires et systèmes linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Opérations élémentaires	
Interprétation en termes de produit matriciel.	Les opérations élémentaires sont décrites dans le paragraphe « Systèmes linéaires » du chapitre « Calculs algébriques ».
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application au calcul du rang et à l'inversion de matrices.
b) Systèmes linéaires	
Écriture matricielle d'un système linéaire.	Interprétation géométrique : intersection d'hyperplans affines.
Système homogène associé. Rang, dimension de l'espace des solutions. Compatibilité d'un système linéaire. Structure affine de l'espace des solutions.	
Le système carré $Ax = b$ d'inconnue x possède une et une seule solution si et seulement si A est inversible. Système de Cramer. § Algorithme du pivot de Gauss.	Le théorème de Rouché-Fontené et les matrices bordantes sont hors programme.

Groupe symétrique et déterminants

A - Groupe symétrique

Le groupe symétrique est introduit exclusivement en vue de l'étude des déterminants.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$. Cycle, transposition. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence et unicité.	Notation S_n. Notation $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$. La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation. Commutativité de la décomposition.
b) Signature d'une permutation	
Tout élément de S_n est un produit de transpositions. Signature : il existe une et une seule application ε de S_n dans $\{-1,1\}$ telle que $\varepsilon(\tau)=-1$ pour toute transposition τ et $\varepsilon(\sigma\sigma')=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ'.	La démonstration n'est pas exigible.

B - Déterminants

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :
- *introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;*
- *établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;*
- *indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.*

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Formes n-linéaires alternées	
Forme n-linéaire alternée.	La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures.
Antisymétrie, effet d'une permutation.	Si f est une forme n-linéaire alternée et si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1,\dots,x_n)=0$.
b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base	
Si e est une base, il existe une et une seule forme n-linéaire alternée f pour laquelle $f(e)=1$. Toute forme n-linéaire alternée est un multiple de $\det_e$.	Notation $\det_e$. La démonstration de l'existence n'est pas exigible.
Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.	Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).
Comparaison, si e et e' sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$. La famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1,\dots,x_n)\neq 0$.	
Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.	$\leftrightarrows$ PC : orientation d'un espace de dimension 3.
c) Déterminant d'un endomorphisme	
Déterminant d'un endomorphisme.	
Déterminant d'une composée.	Caractérisation des automorphismes.
d) Déterminant d'une matrice carrée	
Déterminant d'une matrice carrée.	
Déterminant d'un produit.	Relation $\det(\lambda A)=\lambda^n \det(A)$. Caractérisation des matrices inversibles.

Contenus	Capacités & Commentaires
Déterminant d'une transposée.	

e) Calcul des déterminants

Effet des opérations élémentaires. Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, d'une matrice triangulaire. Déterminant de Vandermonde.	

f) Comatrice

Comatrice. Relation $A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A)\,A = \det(A)\,I_n$.	Notation $\mathrm{Com}(A)$. Expression de l'inverse d'une matrice inversible.

Espaces préhilbertiens réels

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- *généraliser cette notion et exploiter, principalement à travers l'étude des projections orthogonales, l'intuition acquise dans des situations géométriques en dimension* 2 *ou* 3 *pour traiter des problèmes posés dans un contexte plus abstrait ;*
- *approfondir l'étude de la géométrie euclidienne du plan, notamment à travers l'étude des isométries vectorielles.*

Le cours doit être illustré par de nombreuses figures. Dans toute la suite, E est un espace vectoriel réel.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit scalaire	
Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire $(f\|g) = \int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x\cdot y$.
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Formule de polarisation : $2\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$.	 Exemples : sommes finies, intégrales.
c) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie. Famille orthogonale, orthonormale (ou orthonormée). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.	Notation $X^{\perp}$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
d) Bases orthonormales	
Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormale incomplète. Coordonnées dans une base orthonormale, expressions du produit scalaire et de la norme.	 ⇆ PC et SI : mécanique et électricité.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Produit mixte dans un espace euclidien orienté.	Notation $[x_1, \dots, x_n]$. Interprétation géométrique en termes de volume orienté, effet d'une application linéaire.

e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.	En dimension finie, dimension de l'orthogonal.
Projection orthogonale. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.	
Distance d'un vecteur à un sous-espace. Le projeté orthogonal de x sur V est l'unique élément de V qui minimise la distance de x à V.	Notation $d(x, V)$.

f) Hyperplans affines d'un espace euclidien

Vecteur normal à un hyperplan affine d'un espace euclidien. Si l'espace est orienté, orientation d'un hyperplan par un vecteur normal.	Lignes de niveau de $M \mapsto \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$.
Équations d'un hyperplan affine dans un repère orthonormal.	Cas particuliers de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Distance à un hyperplan affine défini par un point A et un vecteur normal unitaire $\vec{n}$: $\left\lvert\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}\right\rvert$.	Cas particuliers de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

g) Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal) : définition par la linéarité et la conservation des normes, caractérisation par la conservation du produit scalaire, caractérisation par l'image d'une base orthonormale.	
Symétrie orthogonale, réflexion.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$.

h) Matrices orthogonales

Matrice orthogonale : définition ${}^tAA = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.	
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Lien entre les notions de base orthonormale, isométrie et matrice orthogonale.	
Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie. Matrice orthogonale positive, négative ; isométrie positive, négative.	
Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}(E)$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.

i) Isométries vectorielles en dimension 2

Description des matrices orthogonales et orthogonales positives de taille 2.	Lien entre les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et les nombres complexes de module 1.
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduira à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs. ⇆ SI : mécanique.
Classification des isométries d'un plan euclidien orienté.	

Intégration

L'objectif majeur de ce chapitre est de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs réelles ou complexes et d'en établir les propriétés élémentaires, notamment le lien entre intégration et primitivation. On achève ainsi la justification des propriétés présentées dans le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse ». Ce chapitre permet de consolider la pratique des techniques usuelles de calcul intégral. Il peut également offrir l'occasion de revenir sur l'étude des équations différentielles rencontrées au premier semestre.
La notion de continuité uniforme est introduite uniquement en vue de la construction de l'intégrale. L'étude systématique des fonctions uniformément continues est exclue.
Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Continuité uniforme	
Continuité uniforme. Théorème de Heine.	La démonstration n'est pas exigible.
b) Fonctions continues par morceaux	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier.	
Fonction continue par morceaux sur un segment, sur un intervalle.	Une fonction est continue par morceaux sur un intervalle I si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.
c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.	Le programme n'impose pas de construction particulière. Interprétation géométrique. ⇆ PC et SI : valeur moyenne. Aucune difficulté théorique relative à la notion d'aire ne doit être soulevée. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.	Les étudiants doivent savoir majorer et minorer des intégrales.
Inégalité : $\left\lvert\int_{[a,b]} f\right\rvert \leqslant \int_{[a,b]} \lvert f\rvert$.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.	
d) Sommes de Riemann	
Si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	Interprétation géométrique. Démonstration dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$. ⇆ I : méthodes des rectangles, des trapèzes.
e) Intégrale fonction de sa borne supérieure	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives. Intégration par parties, changement de variable.	

Contenus	Capacités & Commentaires
f) Calcul de primitives	
Primitives usuelles.	Sont exigibles les seules primitives mentionnées dans le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse ».
Calcul de primitives par intégration par parties, par changement de variable.	
Utilisation de la décomposition en éléments simples pour calculer les primitives d'une fraction rationnelle.	On évitera tout excès de technicité.
g) Formules de Taylor	
Pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n.	
Inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.	L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme.
	On soulignera la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange).

Séries numériques

L'étude des séries prolonge celle des suites. Elle permet d'illustrer le chapitre « Analyse asymptotique » et, à travers la notion de développement décimal de mieux appréhender les nombres réels.
L'objectif majeur est la maîtrise de la convergence absolue ; tout excès de technicité est exclu.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Sommes partielles. Convergence, divergence. Somme et restes d'une série convergente.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.	
Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.
b) Séries à termes positifs	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	
Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.	
c) Comparaison série-intégrale dans le cas monotone	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.	Application à l'étude de sommes partielles et de restes.
Séries de Riemann.	
d) Séries absolument convergentes	
Convergence absolue.	

Contenus	Capacités & Commentaires
La convergence absolue implique la convergence.	Le critère de Cauchy est hors programme. La convergence de la série absolument convergente $\sum u_n$ est établie à partir de celles de $\sum {u_n}^+$ et $\sum {u_n}^-$.
Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	
e) Représentation décimale des réels	
Existence et unicité du développement décimal propre d'un réel.	La démonstration n'est pas exigible.

Dénombrement

Ce chapitre est introduit essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique. Il permet de modéliser certaines situations combinatoires et offre un nouveau cadre à la représentation de certaines égalités.
Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :
- *parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;*
- *l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\|A\|$, $\mathrm{Card}(A)$, $\#A$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis.	
Cardinal de la réunion de deux ensembles finis.	La formule du crible est hors programme.
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Probabilités

Ce chapitre a pour objectif de consolider les connaissances relatives aux probabilités sur un univers fini et aux variables aléatoires définies sur un tel univers présentées dans les classes antérieures. Il s'appuie sur le chapitre consacré au dénombrement.
Ce chapitre a vocation à interagir avec l'ensemble du programme. Il se prête également à des activités de modélisation de situations issues de la vie courante ou d'autres disciplines.

A - Probabilités sur un univers fini

Les définitions sont motivées par la notion d'expérience aléatoire. La modélisation de situations aléatoires simples fait partie des capacités attendues des étudiants.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Expérience aléatoire et univers	
L'ensemble des issues (ou résultats possibles ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers. Événement, événement élémentaire (singleton), événement contraire, événement « A et B », événement « A ou B », événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.	On se limite au cas où cet univers est fini.
b) Espaces probabilisés finis	
Une probabilité sur un univers fini Ω est une application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toutes parties disjointes A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Détermination d'une probabilité par les images des singletons. Probabilité uniforme. Propriétés des probabilités : probabilité de la réunion de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance.	Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par : $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales.	On justifiera cette définition par une approche heuristique fréquentiste. L'application P_B est une probabilité.
Formules de Bayes : 1. si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors $$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B)}$$ 2. si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle, alors $$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j)\, P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)\, P(A_i)}$$	On donnera plusieurs applications issues de la vie courante.
d) Événements indépendants	
Couple d'événements indépendants.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements mutuellement indépendants.	L'indépendance deux à deux des événements $A_1, \ldots, A_n$ n'implique pas l'indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.

B - Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

L'utilisation de variables aléatoires pour modéliser des situations aléatoires simples fait partie des capacités attendues des étudiants.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Variables aléatoires	
Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle. Loi P_X de la variable aléatoire X. Image d'une variable aléatoire par une fonction, loi associée.	Si X est une variable aléatoire et si A est une partie de E, notation $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ pour l'événement $X^{-1}(A)$. Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$, $P(X \leqslant x)$. L'application P_X est définie par la donnée des $P(X = x)$ pour x dans $X(\Omega)$.
b) Lois usuelles	
	La reconnaissance de situations modélisées par les lois classiques de ce paragraphe est une capacité attendue des étudiants.
Loi uniforme. Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Notation $\mathscr{B}(p)$. Interprétation : succès d'une expérience. Lien entre variable aléatoire de Bernoulli et indicatrice d'un événement.
Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $\mathscr{B}(n,p)$. Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes, ou tirages avec remise dans un modèle d'urnes.
c) Couples de variables aléatoires	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales d'un couple de variables aléatoires. Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	La loi conjointe de X et Y est la loi de (X,Y), les lois marginales de (X,Y) sont les lois de X et de Y. Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.
d) Variables aléatoires indépendantes	
Couple de variables aléatoires indépendantes. Si X et Y sont indépendantes : $$P\big((X,Y) \in A \times B\big) = P(X \in A)\, P(Y \in B).$$	
Variables aléatoires mutuellement indépendantes.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors quel que soit $(A_1, \ldots, A_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathscr{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Si X et Y sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.	
e) Espérance	
Espérance d'une variable aléatoire réelle.	Interprétation en terme de moyenne pondérée. Une variable aléatoire centrée est une variable aléatoire d'espérance nulle.
Relation : $\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} P\big(\{\omega\}\big)X(\omega)$. Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance. Espérance d'une variable aléatoire constante, de Bernoulli, binomiale. Formule de transfert : Si X est une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors	
$\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} P(X = x)f(x)$.	L'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X.
Inégalité de Markov.	
Si X et Y sont indépendantes : $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.	La réciproque est fausse en général.
f) Variance, écart type et covariance	
Moments.	Le moment d'ordre k de X est $\mathrm{E}(X^k)$.
Variance, écart type.	La variance et l'écart type sont des indicateurs de dispersion. Une variable aléatoire réduite est une variable aléatoire de variance 1.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable aléatoire de Bernoulli, d'une variable aléatoire binomiale. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Covariance de deux variables aléatoires. Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes.	
Variance d'une somme, cas de variables deux à deux indépendantes.	Application à la variance d'une variable aléatoire binomiale.