DM n°1 - Analyse dimensionnelle et électrocinétique

À rendre pour le mardi 12 septembre

1 Sédimentation

On considère une particule homogène et sphérique qui sédimente à vitesse constante v dans un fluide visqueux. On note respectivement :

- g l'accélération de la pesanteur ;
- r le rayon de la particule ;
- $\Delta\rho = \rho_{\text{particule}} - \rho_{\text{fluide}}$ la différence de masse volumique entre la particule et le fluide ;
- η la viscosité dynamique du fluide, exprimée (dans le système international d'unités) en Pa.s .

1. Écrire l'équation aux dimensions de chacun des quatre paramètres ci-dessus.
2. En supposant que la vitesse de sédimentation v ne dépende que de $g, r, \Delta\rho$ et η, utiliser l'analyse dimensionnelle pour déterminer, à une constante multiplicative adimensionnée près, l'expression littérale de v en fonction de ces quatre paramètres.

   Indication : Tous les exposants qui interviennent devront être des entiers de valeur absolue inférieure ou égale à 2.
3. En déduire un procédé qui permet de réduire drastiquement la durée de la décantation lors du traitement des eaux usées.
4. Déterminer l'expression du nombre de Reynolds Re, grandeur adimensionnée la plus simple formée à partir de $\rho_{\text{fluide}}, r, v$ et η (indication : $\text{Re} \propto \rho_{\text{fluide}}$).
5. On suppose que la force F exercée par le fluide sur la particule ne dépend que de $\rho_{\text{fluide}}, r, \eta$ et v. Déterminer, à une constante multiplicative adimensionnée près, puis commenter l'expression littérale de F :
   (a) en supposant que F est indépendante de ρ_{fluide} ;
   (b) en supposant que F est proportionnelle à ρ_{fluide} .

2 Pendule simple - analyse dimensionnelle

1. En utilisant une analyse dimensionnelle, déterminer, à une constante multiplicative près, notée k, l'expression de la période d'un pendule simple constitué d'une masse m oscillant au bout d'un fil sans masse inextensible de longueur ℓ dans le champ de pesanteur terrestre.
2. Retrouver l'expression de la constante k en utilisant une méthode énergétique.
3. On veut réaliser une mesure de g à l'aide d'un pendule de longueur $\ell = 1.00\ m \pm 1\ cm$ à l'aide d'un chronomètre précis au dixième de seconde près[1].
   (a) Quel est l'ordre de grandeur de la période T mesurée (on pourra prendre $g \simeq 10\ m.s^{-2}$ pour cette question) ?
   (b) Quelle est la précision maximale accessible sur la mesure de g sur une seule période ?
      i. Méthode 1 : en utilisant une méthode de Monte-Carlo codée en python.
      On se reportera au Jupyter Notebook **64a7-1758779** dans Capytale pour répondre à cette question.

1. On supposera donc ici que les incertitudes-type respectives sur la longueur ℓ et sur la période T sont données par $u(\ell) = 1\ cm$ et $u(T) = 0.1\ s$.

ii. Méthode 2 : par le calcul.
On rappelle que la formule générale permettant de calculer l'incertitude type $u(f)$ sur une fonction $f(x,y)$ de deux variables x et y d'incertitudes respectives $u(x)$ et $u(y)$ est donnée par :

$$u(f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 u(x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 u(y)^2}$$

Montrer, avec une hypothèse qu'on justifiera, que

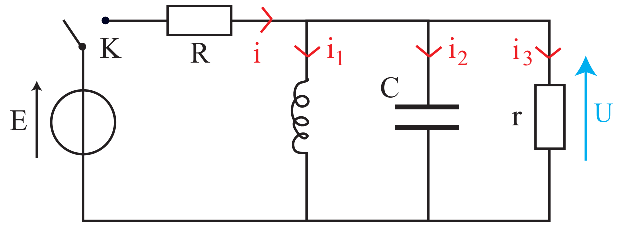
$$\frac{u(g)}{g} \simeq 2\frac{u(T)}{T}$$

et conclure.

(c) Sans se limiter à une mesure sur une seule période, quelle serait la précision maximale de mesure de g ?

3 Circuit RLC parallèle

On considère le circuit RLC parallèle de la figure ci contre. Le condensateur C est initialement déchargé et tous les courants sont nuls. On ferme l'interrupteur en $t = 0$.



1. Déterminer U, i_1, i_2, i_3 juste après la fermeture de l'interrupteur et au bout d'un temps très grand. On présentera les résultats sous forme d'un tableau.
2. (a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $i_3\,(t)$.
   (b) Écrire cette équation sous forme canonique, exprimer puis calculer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.
   Données : $R = 2,5$ kΩ ; $r = 1,25$ kΩ ; $C = 1$ μF ; $L = 20$ mH ; $E = 6$ V.
   (c) Montrer que la solution de l'équation différentielle correspond à un régime pseudo-périodique.
3. (a) Calculer la pseudo-pulsation Ω et le temps caractéristique d'amortissement τ.
   (b) Déterminer l'expression de $U\,(t)$.
   (c) Calculer le temps t_0 au bout duquel U atteint son premier maximum. En déduire la valeur maximale de U.
   (d) Tracer la courbe $U(t)$ avec python, et vérifier la cohérence avec les résultats obtenus précédemment.
   On se reportera au Jupyter Notebook **20f7-1759040** dans Capytale pour répondre à cette question.
4. Faire directement la résolution numérique de l'équation différentielle avec python et comparer avec les résultats précédents. On se reportera à la suite du Notebook.
5. Dans le cas d'un régime pseudo-périodique, on définit le **décrément logarithmique** par $\delta = ln\left(\dfrac{U(t_i)}{U(t_{i+1})}\right)$, où t_i correspond à l'instant pour lequel la courbe $U(t)$ atteint son $i^{ième}$ maximum local.
   (a) En réutilisant l'expression théorique de $U(t)$ obtenue précédemment, montrer que $\delta \simeq \dfrac{\pi}{Q}$, où Q est le facteur de qualité.
   (b) En déduire la valeur numérique du facteur de qualité Q en utilisant la courbe tracée sur python, et la comparer à celle trouvée précédemment.
   (c) La méthode consistant à compter le nombre d'oscillations de la courbe pour évaluer la valeur de Q est-elle fiable ?