Correction - DM n°1 - Analyse dimensionnelle et électrocinétique

1 Sédimentation

1) $[g]=L\cdot T^{-2}$; $[r]=L$; $[\Delta\rho]=M\cdot L^{-3}$; $[\eta]=\left[\dfrac{F}{L^2}\times T\right]=\dfrac{M\cdot L\cdot T^{-2}}{L^2}\times T$ donc $[\eta]=M\cdot L^{-1}\cdot T^{-1}$.

2) En supposant que la vitesse de sédimentation v ne dépende que de g, r, $\Delta\rho$ et η, on peut chercher son expression en fonction de ces quatre paramètres sous la forme :

$v=k\,g^{\alpha}\,r^{\beta}\Delta\rho^{\gamma}\,\eta^{\delta}$, avec $[k]=[\alpha]=[\beta]=[\gamma]=[\delta]=1$ et $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{Q}^4$.

$$\begin{aligned}
\text{L'homogénéité impose}\quad & \left(L\cdot T^{-2}\right)^{\alpha}L^{\beta}\left(M\cdot L^{-3}\right)^{\gamma}\left(M\cdot L^{-1}\cdot T^{-1}\right)^{\delta}=L\cdot T^{-1}\\
\Leftrightarrow\quad & M^{\gamma+\delta}\cdot L^{\alpha+\beta-3\gamma-\delta}\cdot T^{-2\alpha-\delta}=L\cdot T^{-1}\\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases}\gamma+\delta=0\\ \alpha+\beta-3\gamma-\delta=1\\ 2\alpha+\delta=1\end{cases}\\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases}\alpha\in\mathbb{R}\\ \beta=3\alpha-1\\ \gamma=2\alpha-1\\ \delta=1-2\alpha\end{cases}
\end{aligned}$$

Comme α, β, γ et δ doivent être des entiers de valeur absolue inférieure ou égale à 2, la seule* solution non triviale est $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=2\\ \gamma=1\\ \delta=-1\end{cases}$, c'est-à-dire que $\boxed{v=\dfrac{k\,g\,r^2\,\Delta\rho}{\eta}}$.

($\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$ est impossible car v dépend forcément de quelque chose...)

* $|\delta|\leq 2\Rightarrow|1-2\alpha|\leq 2$ soit $\alpha=0$ ou $\alpha=1$.
Le cas $\alpha=0$ avec $\delta=1$, $\gamma=-1$ et $\beta=-1$ ne convient pas car v dépend forcément de g lors d'une sédimentation !

3) On constate que la vitesse de sédimentation est proportionnelle au carré de la taille des particules. C'est la raison pour laquelle on les fait s'agglomérer (on parle de floculation) avant de les laisser décantation. Si les particules sont dix fois plus grosses après floculation, la durée de la décantation sera divisée par 100, ce qui est un gain spectaculaire.

4) On cherche Re sous la forme $\mathrm{Re} = \rho^{\alpha}\, v^{\beta} r^{\gamma}\, \eta^{\delta}$, avec $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{Q}^4$.

Comme on cherche l'expression la plus simple possible, on ne s'embarrasse pas d'une constante adimensionnée, ce qui revient à écrire $k = 1$.

L'homogénéité impose $\quad (M\cdot L^{-3})^{\alpha}\,(L\cdot T^{-1})^{\beta}\, L^{\gamma}\,(M\cdot L^{-1}\cdot T^{-1})^{\delta} = 1$

$$\Leftrightarrow \quad M^{\alpha+\delta(\ )}\cdot L^{-3\alpha+\beta+\gamma-\delta}\cdot T^{-\beta-\delta} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha+\delta = 0 \\ -3\alpha+\beta+\gamma-\delta = 0 \\ -\beta-\delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ \beta = \alpha \\ \gamma = \alpha \\ \delta = -\alpha \end{cases}$$

Finalement, le quadruplet d'exposants entiers non nuls et les plus petits en valeur absolue est :

$\begin{cases} \alpha = \beta = \gamma = 1 \\ \delta = -1 \end{cases}$. On obtient ainsi $\mathrm{Re} = \rho v r \eta^{-1} = \dfrac{\rho v r}{\eta}$. On pouvait utiliser également l'indication disant que Re $\propto$ ρ

5) En supposant que la force F exercée par le fluide sur la particule ne dépende que de ρ_{fluide}, r, η et v, on peut chercher son expression littérale sous la forme $F = k\,\rho^{\alpha}\, r^{\beta}\, \eta^{\gamma}\, v^{\delta}$, avec $[k]=[\alpha]=[\beta]=[\gamma]=[\delta]=1$ et $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{Q}^4$.

L'homogénéité impose $\quad (M\cdot L^{-3})^{\alpha}\, L^{\beta}\,(M\cdot L^{-1}\cdot T^{-1})^{\gamma}\,(L\cdot T^{-1})^{\delta} = M\cdot L\cdot T^{-2}$

$$\Leftrightarrow \quad M^{\alpha+\gamma}\cdot L^{-3\alpha+\beta-\gamma+\delta}\cdot T^{-\gamma-\delta} = M\cdot L\cdot T^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha+\gamma = 1 \\ -3\alpha+\beta-\gamma+\delta = 1 \\ \gamma+\delta = 2 \end{cases}$$

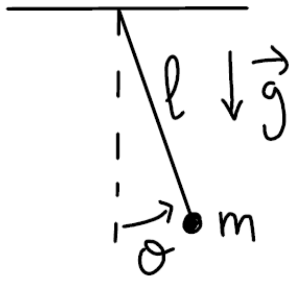
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ \beta = 1+\alpha \\ \gamma = 1-\alpha \\ \delta = 1+\alpha \end{cases}$$

a) En supposant que F est indépendante de ρ_{fluide} , on a $\alpha = 0$, ce qui entraîne $\beta = \gamma = \delta = 1$.

Dans ce cas on a $F \propto r\eta v$. Effectivement, pour une particule sphérique, le mathématicien et physicien britannique George Gabriel Stokes (1819 - 1903) a trouvé $\boxed{F = 6\pi r\eta v}$, formule valable pour les écoulements à petit nombre de Reynolds $\left(\mathrm{Re} \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{\rho v r}{\eta}\right)$, c'est-à-dire pour une particule se déplaçant " lentement " dans un fluide " assez visqueux " (le seul critère rigoureux étant ici la valeur du nombre de Reynolds).

b) En supposant que F est proportionnelle à ρ_{fluide}, on a $\alpha = 1$, ce qui implique $\beta = \delta = 2$ et $\gamma = 0$. Dans ce cas, on aura donc $F \propto \rho r^2 v^2$. Plus précisément, toujours pour un objet sphérique allant " vite " dans un fluide " peu visqueux ", on aura $F = C_x \times \pi r^2 \times \dfrac{1}{2}\rho v^2$, où C_x est ce fameux coefficient adimensionné que les fabricants d'avion et de voiture cherchent à minimiser et $\dfrac{1}{2}\rho v^2$ est ce qu'on appelle la *pression dynamique*.

2 Pendule simple - analyse dimensionnelle

1) 

Les paramètres physiques qui peuvent a priori intervenir dans l'expression de la période T sont : m, ℓ et g

$$\Rightarrow T = k\, m^{\alpha} \ell^{\beta} g^{\gamma}$$

$$\Rightarrow [T] = [m]^{\alpha}[\ell]^{\beta}[g]^{\gamma}$$

$$\Rightarrow T = M^{\alpha} L^{\beta} (LT^{-2})^{\gamma}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = -2\gamma \\ 0 = \alpha \\ 0 = \beta + \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = -1/2 \\ \beta = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T = k\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

2) On applique le théorème de la puissance mécanique au pendule dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

pas de forces dissipatives

or $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \ell \dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta$

$$\Rightarrow m\ell\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

On obtient un oscillateur harmonique de période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

dans le cadre des petites oscillations.

$$\Rightarrow k = 2\pi.$$

3) a) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}} \simeq 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{10}} \simeq \boxed{2\,s}$ ce qui semble raisonnable pour un pendule de 1 m.

b) i) cf Notebook 563a-1759230

ii) $g = \dfrac{4\pi^2\ell}{T^2}$

donc $u(g) = \sqrt{\underbrace{\left(\dfrac{\partial g}{\partial \ell}\right)^2 u(\ell)^2}_{(1)} + \underbrace{\left(\dfrac{\partial g}{\partial T}\right)^2 u(T)^2}_{(2)}}$

or $\dfrac{\partial g}{\partial \ell} = \dfrac{4\pi^2}{T^2}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial T} = -2\times\dfrac{4\pi^2\ell}{T^3}$

$\Rightarrow \dfrac{(1)}{(2)} = \left(\dfrac{\dfrac{\cancel{4\pi^2}}{T^2}u(\ell)}{2\dfrac{\cancel{4\pi^2}\ell\, u(T)}{T^3}}\right)^2 = \dfrac{T^2 u(\ell)^2}{4\ell^2 u(T)^2} \simeq \dfrac{4\times 10^{-4}}{4\times 1\times 10^{-2}} \simeq 10^{-2}$

Le second terme est donc environ 100 fois plus grand que le premier, et on peut donc négliger l'incertitude sur la longueur dans celle de g, de sorte que :

$u(g) \simeq 2\times\dfrac{4\pi^2\ell}{T^3}u(T)$ soit $\dfrac{u(g)}{g} = 2\dfrac{u(T)}{T} \simeq 0{,}1$

Finalement : $\boxed{g \simeq 10 \pm 1 \quad m.s^{-2}}$

Cette mesure effectuée sur une seule période n'est évidemment pas très précise...

c) Dans la pratique, on peut augmenter la précision sur la mesure de T en faisant une mesure sur autant de périodes que l'on veut, de manière à ce que l'incertitude sur la période soit très inférieure à celle sur la longueur.

Evaluons le temps de mesure pour que cela soit le cas à 1% près :

$$\frac{u(T)}{NT} = \frac{1}{100}\frac{u(\ell)}{\ell} = 10^{-4} \Rightarrow N = \frac{u(T)}{T}\times 10^4 = \frac{0{,}1}{2}.10^4$$

soit $\boxed{N = 500 \text{ périodes}}$

qui correspondent à $\Delta t_{tot} = NT = 1000\,s \simeq 17\,min$

Ceci est tout à fait réalisable.

Dans ce cas, $u(g) \simeq \left|\frac{\partial g}{\partial \ell}\right| u(\ell) = \frac{4\pi^2}{T^2} u(\ell)$

soit $\frac{u(g)}{g} \simeq \frac{u(\ell)}{\ell} = 1\%$

et finalement $\boxed{u(g) = 0{,}1\ m.s^{-2}}$

Ceci est suffisant pour mesurer que $g = 9{,}8 \pm 0{,}1\ m.s^{-2}$ mais cela est insuffisant pour clairement mettre en évidence les variations de g avec la latitude (variations entre 9,78 et 9,83 $m.s^{-2}$ entre l'équateur et les pôles).

3 Circuit RLC parallèle

1.

	U	i_1	i_2	i_3
$t = 0^+$	0	0	$\frac{E}{R}$	0
$t \to +\infty$	0	$\frac{E}{R}$	0	0

2. (a) $\frac{\mathrm{d}^2 i_3}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} i_3 = 0$.

   (b) $\frac{\mathrm{d}^2 i_3}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i_3 = 0$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 7{,}07.10^3$ rad.s^{-1} ; $Q = \frac{Rr}{R+r}\sqrt{\frac{C}{L}} = 5{,}89$.

3. (a) $\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1} = 7{,}04.10^3$ rad.s^{-1} ; $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = 1{,}67.10^{-3}$ s.

   (b) $U(t) = \frac{E}{RC\Omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\Omega t)$.

(c) En calculant le premier maximum de la fonction précédente par un calcul de dérivée $\frac{dU}{dt} = 0$, on obtient : $t_0 = \frac{1}{\Omega} atan\left(\Omega\tau\right) = 2.1.10^{-4}\ s$ (calculatrice en radians !) ; En remplaçant dans l'expression précédente, on obtient $U(t_0) = U_{\text{max}} = 0,30\ V$.

On aurait pu obtenir cette valeur avec une approximation consistant à dire que le premier maximum est atteint lorsque le sinus vaut 1. On obtient les mêmes valeurs numériques dans ce cas car τ et $\frac{2\pi}{\Omega}$ sont du même ordre de grandeur. Attention, cela n'aurait pas été le cas si τ avait été beaucoup plus faible...

(d) Voir Jupyter Notebook **2d0d-1759934**.

4. Voir Jupyter Notebook **2d0d-1759934**.

5. (a) On rappelle que le régime pseudo périodique de pseudo pulsation Ω était caractérisé par $U\left(t\right) = \frac{E}{RC\Omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\left(\Omega t\right)$, et donc :

$$\delta = ln\left(\frac{U(t_i)}{U(t_{i+1})}\right) = ln\left(e^{-\dfrac{t_i - t_{i+1}}{\tau}}\right) = \frac{t_{i+1} - t_i}{\tau} = \frac{2\pi}{\Omega\tau} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

or $Q \simeq 6$ de sorte que $4Q^2 \gg 1$ et finalement :

$$\boxed{\delta \simeq \frac{\pi}{Q}}$$

(b) Voir Jupyter Notebook **2d0d-1759934**.

(c) Voir Jupyter Notebook **2d0d-1759934**.