

## Correction - DM n°2 - Électronique numérique

## 1 Phénomène d'aliasing sur une vidéo

Afin de déterminer la vitesse de la voiture lorsque les roues semblent ne pas tourner, plusieurs constatations et estimations d'ordres de grandeurs doivent être faites :

- \* la roue est apparemment immobile alors que la voiture est en mouvement, puis elle <sup>(1)</sup> semble tourner à l'envers, puis le sens de rotation devient confus, puis elle <sup>(2)</sup> tourne vers l'avant, avant l'arrêt complet <sup>(3)</sup> de la voiture. On peut donc distinguer <sup>(4)</sup> 4 phases.
- \* On peut estimer le diamètre de la roue à  $D = 50 \text{ cm}$ .
- \* La vidéo a été réalisée avec une caméra prenant 30 images par seconde.
- \* La jante de la roue comporte 5 branches, et on pourra observer une apparente immobilité sur la vidéo si la roue tourne de  $\frac{1}{5}$  de tour,  $\frac{2}{5}$  de tour,  $\frac{3}{5}$  de tour... pendant  $\frac{1}{30}$  ème de seconde. (ceci n'est vrai que parce que les rayons de la jante sont identiques).
- \* Comme il n'y a pas d'autre phase d'immobilité entre la première phase d'immobilité et l'arrêt de la voiture, on peut en déduire directement que la roue tourne d' $\frac{1}{5}$  ème de tour en  $\frac{1}{30}$  ème de seconde.

On peut finalement en déduire très simplement que la voiture a avancé de  $\frac{1}{5}$  ème de la circonférence de la roue en  $\frac{1}{30}$  ème de seconde, d'où :

$$v = \frac{\pi d}{\frac{1}{30}} = \pi \times \frac{0,5 \times 30}{5} = 9,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = \underline{\underline{34 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}}$$

On notera que cet ordre de grandeur est tout à fait cohérent avec l'impression de vitesse modérée de la voiture au début de la vidéo, qui parcourt bien une dizaine de mètres en 1 seconde (d'après l'échelle des repères visuels en arrière plan).

On peut remarquer qu'une étude du type pointage vidéo ne peut pas être faite simplement car la voiture décélère, mais qu'elle peut néanmoins donner le bon ordre de grandeur.

Remarques: Le phénomène observé ici correspond à un repliement de spectre (ou aliasing) à cause d'un sous-échantillonnage. Le critère de Shannon ( $f_0 < \frac{f_e}{2}$ ) n'est pas respecté ici. Ce critère devrait plutôt être écrit en terme de pulsations :  $\omega_0 < \frac{\omega_e}{2}$  où  $\omega_e$  correspond à la pulsation des "flashs" de la vidéo<sup>2</sup>, et où  $\omega_0$  est la pulsation du phénomène périodique, qui vaut ici  $\omega_0 = 5\omega_{roue}$  car on retrouve une roue apparemment inchangée tous les  $\frac{1}{5}$ <sup>ème</sup> de tour. Lors de l'immobilité, on a  $\omega_0 = 5\omega_{roue} = \omega_e > \frac{\omega_e}{2}$ .

critère de Shannon non vérifié.

Le repliement de spectre est observé à la pulsation  $\omega_0 - \omega_e = 0$ , donc autour de la pulsation nulle, c'est à dire l'immobilité.

On notera qu'un même phénomène d'immobilité aurait pu être observé avec un échantillonnage encore plus défavorable, lorsque  $\omega_0 = 2\omega_e$  (la roue tourne de  $\frac{2}{5}$ <sup>ème</sup> de tour entre 2 images).

Essayons maintenant d'interpréter les 4 phases de l'observation faite au début :

Phase 1 : impression d'immobilité de la roue

rayon de référence (non distinguable des autres sur la vidéo)

rotation de  $\theta_1 = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$  entre 2 images

$\theta_2 = 72^\circ$

Phase 2 : la voiture ralentit - impression que la roue "tourne à l'envers".

rotation de  $36^\circ < \theta_2 < 72^\circ$  entre 2 images

impression de rotation

Phase 3 : la voiture ralentit encore - la roue ne semble ni tourner vers l'avant ni vers l'arrière - impression que la roue comporte davantage de pales (10).

rotation de  $\theta_3 = 36^\circ = \frac{360^\circ}{10}$  entre 2 images

impression :

Phase 4 : la voiture ralentit encore davantage et s'approche de l'arrêt - impression de rotation vers l'avant (réel)

rotation de  $\theta_4 < 36^\circ$  entre 2 images

impression de rotation vers l'avant (réel)

## 2 Convertisseur Analogique-Numérique (CAN) parallèle 3 bits

1.  $V_1^+ = e$  par construction. Un pont diviseur de tension entre les tensions 0 et  $E_{\text{ref}}$  donne

$$V_1^- = \frac{R/2}{R/2 + 6R + 3R/2} E_{\text{ref}} = \frac{1}{16} E_{\text{ref}} = 0,5V.$$

Pour  $e < 0,5V$  alors  $V_{s1} = -V_{\text{sat}}$ , et si  $e > 0,5V$  alors  $V_{s1} = +V_{\text{sat}}$ .

2.  $V^+ = e$  pour tous les ALI. Un pont diviseur de tension donne

$$V_2^- = \frac{R + R/2}{R/2 + 6R + 3R/2} E_{\text{ref}} = \frac{3}{16} E_{\text{ref}} = 1,5V, \text{ ce qui est le seuil de basculement de l'ALI 2. De}$$

même  $V_3^- = \frac{5}{16} E_{\text{ref}} = 2,5V$  : c'est le seuil de basculement de l'ALI 3. Le seuil de basculement

de l'ALI 4 est 3,5V, de l'ALI 5 est 4,5V, de l'ALI 6 est 5,5V et de l'ALI 7 : 6,5V.

Si  $e = 0V$  au départ, tous les ALI sont à  $-V_{\text{sat}}$ . En passant au dessus de 0,5V, l'ALI 0 bascule

à  $+V_{\text{sat}}$ , puis à chaque fois que  $e$  augmente d'1 volt, un ALI supplémentaire bascule à  $+V_{\text{sat}}$ .

Pour une tension de  $n$  volt, il y a  $n$  ALI à  $+V_{\text{sat}}$ .

3. Voir 2<sup>e</sup> ligne tableau ci-dessous.

4. Le code obtenu n'est pas le code binaire voulu, conversion en base 2 du signal d'entrée. Le décodeur numérique a pour fonction de transformer le code binaire obtenu à la sortie des ALI en code binaire recherché. Il est composé de portes logiques.

*Une porte logique combine des entrées logiques (0 ou 1) selon les lois de l'algèbre de BOOLE, comme les portes NAND (no and) par exemple.*

$e$ (V)	0	1	2	3	4	5	6	7
Sorties ALI	0000000	0000001	0000011	0000111	0001111	0011111	0111111	1111111
$a_2 a_1 a_0$	000	001	010	011	100	101	110	111

5. Dans l'exemple précédent, un convertisseur  $n = 3$  bits a nécessité 7 comparateurs soit  $2^n - 1 = 2^3 - 1 = 7$ .

Pour un convertisseur 16 bits, comme chaque bit peut prendre la valeur 0 ou 1, il y a  $2^{16} = 65\,536$  niveaux possibles (en comptant le 0), donc il faut utiliser 65 535 ALI placés en parallèles, ce qui est beaucoup trop ! Ce type de CAN est limité à 6 ou 8 bits dans la pratique.

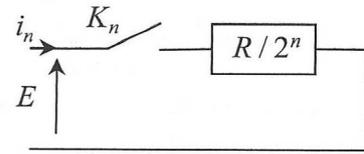
*Pour un CAN parallèle à  $n$  bits, il faudra  $(2^n - 1)$  ALI : c'est le vieux problème du nombre de poteaux et d'intervalles....*

### 3 Convertisseur Numérique-Analogique (CNA) 4 bits à résistances pondérées

1. Plaçons la masse (potentiel nul) sur la borne commune du bas. Le potentiel vaut donc  $E$  à gauche des interrupteurs.

Quand l'interrupteur  $i$  est ouvert ( $K_n = 0$ ), l'intensité du courant dans  $R_n$  est nulle ; quand l'interrupteur  $i$  est fermé ( $K_n = 1$ ), l'intensité du courant dans  $R_n$  vaut :

$$i_n = \frac{E}{R_n} = \frac{E}{R/2^n} = 2^n \frac{E}{R}$$



Finalement, l'intensité du courant dans la résistance  $R_n$  vaut donc :  $i_n = K_n 2^n \frac{E}{R}$ .

Appliquons ensuite la loi des nœuds puis obtenir  $i$  total :  $i = i_0 + i_1 + i_2 + i_3 = \sum_{n=0}^3 K_n 2^n \frac{E}{R}$ .

Or  $u_s = U_g = R' i$ , ce qui donne  $u_s = R' \sum_{n=0}^3 K_n 2^n \frac{E}{R}$  soit  $u_s = \frac{R'}{R} E \left( \sum_{n=0}^3 K_n 2^n \right)$ .

$\left( \sum_{n=0}^3 K_n 2^n \right)$  est une conversion binaire/décimale. Le code binaire est donc converti en analogique avec un signal proportionnel à la conversion décimale obtenue.

0000	0 V
0001	1 V
0010	2 V
0011	3 V
0100	4 V
...	...
1111	15 V

2. On a, avec les valeurs numériques données :  $(R'/R)E = 1 \text{ V}$ .

En appliquant la formule obtenue question précédente, on remplit le tableau ci-contre, qui illustre clairement la conversion binaire/décimale. Toutefois,  $U_g$  est à la limite de la saturation à 1111 (soit 15V). Il est préférable de choisir les valeurs des composants de sorte à ce que la tension de sortie demandée soit strictement inférieure à  $V_{sat}$ .

3. Avec un échantillonnage à 16 bits, le convertisseur aura besoin de 16 résistances en parallèle. La valeur maximale est 1111111111111111 soit en binaire

$$\sum_{n=0}^{15} 2^n = \frac{2^{16} - 1}{2 - 1} = 2^{16} - 1 = 65535 \text{ (suite géométrique de raison 2). C'est évidemment une}$$

tension qui dépasse la tension de saturation en sortie.

4. Pour éviter ce problème, il faut que la plus grande tension demandée en sortie reste

inférieure à  $V_{sat}$  soit :  $u_s = (2^{16} - 1)E \frac{R'}{R} < V_{sat}$  soit  $E < \frac{R}{R'} \frac{V_{sat}}{(2^{16} - 1)}$ .

*✍ Ce montage est en réalité peu utilisé à cause de la difficulté à réaliser un réseau de résistances de valeurs  $R/2^n$  très précises.*