

**Correction - DM n°3 - Électrocinétique et  
mécanique**

# 1 Déphaseur

1)  $\underline{s} = \underline{V}_A - \underline{V}_B$  (1)

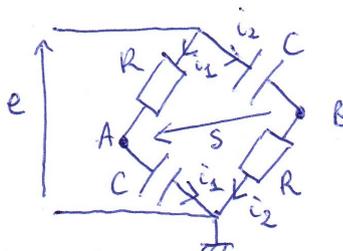
De plus, le noeud situé étant au potentiel  $e$  et le noeud du bas étant à la masse, on peut écrire:

$e - \underline{V}_A = R \underline{i}_1$  (2)

$e - \underline{V}_B = \underline{Z}_c \underline{i}_2$  (3)

$\underline{V}_A - 0 = \underline{Z}_c \underline{i}_1$  (4)

$\underline{V}_B - 0 = R \underline{i}_2$  (5)



On notera que l'appareil branché entre A et B doit avoir une impédance très grande (sortie ouverte du filtre) pour que les courants se conservent au niveau des noeuds A et B.

En éliminant les courants dans (2) et (3), en utilisant (4) et (5):

$$\left\{ \begin{array}{l} e - \underline{V}_A = \frac{R \underline{V}_A}{\underline{Z}_c} \Rightarrow \underline{V}_A = \frac{e}{1 + \frac{R}{\underline{Z}_c}} \\ e - \underline{V}_B = \frac{\underline{Z}_c \underline{V}_B}{R} \Rightarrow \underline{V}_B = \frac{e}{1 + \frac{\underline{Z}_c}{R}} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{s} = e \left[ \frac{1}{1 + \frac{R}{\underline{Z}_c}} - \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_c}{R}} \right]$$

Autre méthode : voir note en bas de page.

$\Rightarrow \underline{s} = e \left( \frac{\underline{Z}_c - R}{\underline{Z}_c + R} \right)$  et finalement  $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{e} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$  donc  $\omega_c = \frac{1}{RC}$

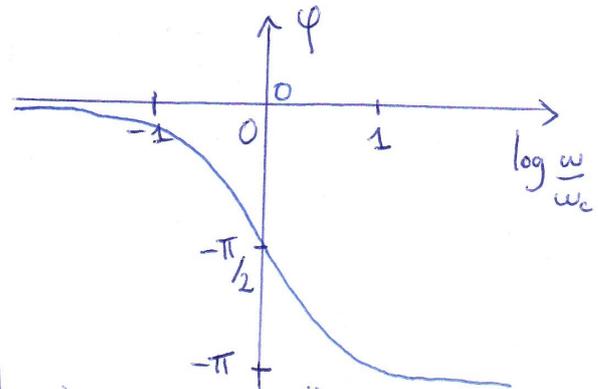
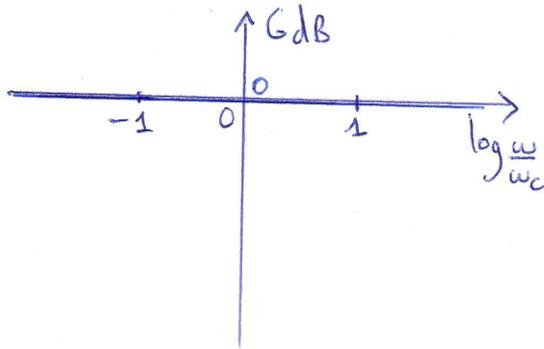
2) Etude asymptotique de la fonction de transfert:

	$\underline{H}$	G	GdB	$\varphi$	
$\omega \rightarrow 0$ (BF)	1	1	0	0	on garde donc la valeur négative de $-\pi$ pour la phase en $\omega \rightarrow \infty$ pour éviter un saut de phase et rester dans $[-\pi; \pi]$
$\omega \rightarrow +\infty$ (HF)	-1	1	0	$\pm \pi$	
$\omega = \omega_c$	$\frac{1-j}{1+j}$	1	0	$\text{Arg}(1-j) - \text{Arg}(1+j) = -\pi/4 - \pi/4 = -\pi/2$	

Autre méthode plus rapide pour la première question : on peut directement appliquer des ponts diviseurs de tension de sorte que  $V_A = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + R} e$  et  $V_B = \frac{R}{\underline{Z}_C + R} e$ , d'où  $s = V_A - V_B = \frac{\underline{Z}_C - R}{\underline{Z}_C + R} e = \dots$

3) Diagramme de Bode:

$$\underline{H} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \begin{cases} G = 1 \text{ pour toute fréquence} \Rightarrow G_{dB} = 0 \\ \varphi = \text{Arg } \underline{H} = \text{Arctan}(-RC\omega) - \text{Arctan}(RC\omega) \\ = -2 \text{arctan}(RC\omega). \end{cases}$$



4) a) En branchant un oscilloscope classique en sortie, on relierait nécessairement le point B à la masse et on court-circuiterait une résistance, de sorte que les propriétés du filtre seraient modifiées.

Afin d'éviter ce problème de masse, il faut soit utiliser une sonde différentielle (entrées différentielles de Latis Pro par exemple), soit un transformateur d'isolement.

b) Le signal sinusoïdal a une fréquence  $f = 320 \text{ Hz}$ , soit  $\omega = 2\pi f = 2000 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Le circuit déphase de  $-\pi/2$  lorsque  $\omega = \omega_c$ , donc il faut fixer  $\omega_c = \frac{1}{RC} = 2000 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Les contraintes imposées par les adaptations d'impédances dans le montage sont  $R_{GBF} = 50 \Omega \ll R \ll R_{oscillo} \approx 1 \text{ M}\Omega$ ,

donc on peut choisir  $R = 1 \text{ k}\Omega$ , ce qui implique

$$C = \frac{1}{R\omega_c} = \frac{1}{10^3 \cdot 2 \cdot 10^3} = \boxed{0,5 \mu\text{F}}$$

c) voir le notebook 6a95-631102 sur Capytale.

L'allure du signal de sortie est donnée ci-dessous. Le signal n'est pas simplement déphasé, mais déformé, car le montage déphase différemment chaque harmonique du signal créneau.

Remarque: le filtrage a été réalisé de 2 manières différentes :

1) En utilisant la linéarité du filtre :

$$s(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)} G((2p+1)f_0) \cos \left[ (2p+1)f_0 \cdot 2\pi t + \varphi((2p+1)f_0) \right]$$

or  $G((2p+1)f_0) = 1$

$$\varphi((2p+1)f_0) = -2 \arctan \left( \frac{(2p+1)f_0}{f_c} \right)$$

d'où le détail du programme python.

2) En utilisant le filtrage numérique;

$$\underline{H} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{s}{e} \Rightarrow e(t) - \frac{1}{\omega_c} \frac{de}{dt} = s(t) + \frac{1}{\omega_c} \frac{ds}{dt}$$

$\omega_c = \frac{1}{RC}$   
passage en temporel

↓ discrétisation

$$e_n - \frac{1}{\omega_c} \frac{(e_{n+1} - e_n)}{T_e} = s_n + \frac{1}{\omega_c} \frac{(s_{n+1} - s_n)}{T_e}$$

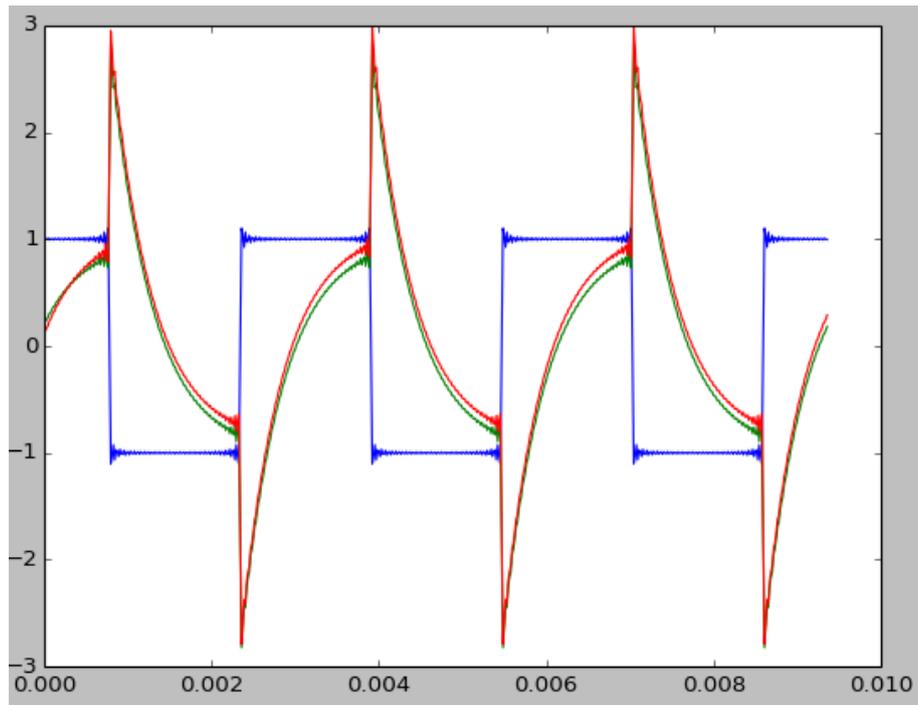
d'où :  $\omega_c T_e e_n - (e_{n+1} - e_n) = \omega_c T_e s_n + s_{n+1} - s_n$

on obtient la relation de récurrence :

$$\boxed{s_{n+1} = s_n(1 - \omega_c T_e) - e_{n+1} + e_n(\omega_c T_e + 1)}$$

et on a fait le tracé pour  $s_0 = 0$

Les 2 courbes sont tracées avec un décalage de 0,1 afin de visualiser les signaux qui sont parfaitement superposés sinon!



## 2 Etude expérimentale d'un filtre

1) On mesure sur l'oscillogramme (CH1):

⊕ Amplitude = 2,5V

⊙  $T = 2\text{ms} \Rightarrow f = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} = 500\text{Hz}$

⊕ Valeur moyenne = 0V.

2)  $\underline{H} = \frac{-2jxH_0\xi}{1+2j\xi-x^2}$   $\begin{matrix} \nearrow x \rightarrow 0 \\ \searrow x \rightarrow \infty \end{matrix}$   $\Rightarrow$  passe-bande d'ordre 2 à priori

On peut déterminer la bande passante en utilisant la définition:

$\Delta f = f_{c2} - f_{c1}$  où  $f_{c1,2}$  tq  $G(f_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$

et on peut aussi mettre la fonction de transfert sous forme canonique et utiliser  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$  ou  $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$

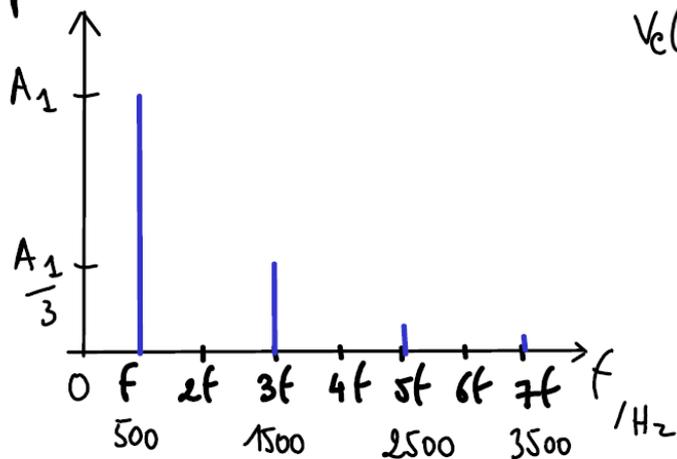
avec  $\underline{H} = \frac{K}{1+jQ(x-\frac{1}{x})} = \frac{jKx/Q}{j\frac{x}{Q}-x^2+1}$

donc par identification,  $2\xi = \frac{1}{Q}$  et  $H_0 = -K$  (diphaseage "inhabituel")

Finalement  $\Delta f = \frac{f_0}{Q} = f_0 \times 2\xi = 1500 \times 2 \times 0,05 = 150\text{Hz}$

3) Le signal créneau est impair, et sa décomposition sur les cosinus qui sont des fonctions paires est donc nulle:  $B_k = 0, \forall k$

Spechtre de  $v_e$



$$v_e(t) = A_1 \sin(2\pi ft) + \frac{A_1}{3} \sin(2\pi \times 3ft) + \frac{A_1}{5} \sin(2\pi \times 5ft) + \dots$$

4) Si on approxime le signal de sortie à une seule sinusoïde, on peut écrire:

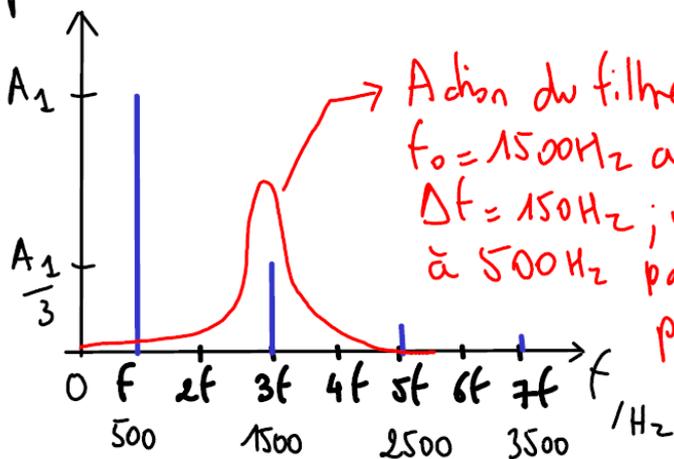
$$v_s(t) = v_{s\max} \sin(\omega t + \varphi) \text{ avec : } v_{s\max} = 1 \text{ V}$$

$$f_s = \frac{\omega}{2\pi} = 1500 \text{ Hz (3 périodes du signal par une seule du créneau).}$$

On peut ajouter que la phase  $\varphi$  est égale à  $\pi$  d'après l'expression de la fonction de transfert ( $K = -H_0$ ).

5) Si on prend en compte les 2 principales sinusoïdes

Spechtre de  $v_e$



Action du filtre passe-bande centré sur  $f_0 = 1500 \text{ Hz}$  avec une bande passante  $\Delta f = 150 \text{ Hz}$ ; une petite partie du pic à  $500 \text{ Hz}$  passe, ce qui se manifeste par une petite modulation du signal à  $1500 \text{ Hz}$  justement à  $500 \text{ Hz}$ .

On peut noter qu'il n'y a pas de modulation à la fréquence 2500Hz car l'amplitude du signal créneau à cette fréquence est 9 fois plus faible.

L'amplitude de la modulation à 500Hz vaut environ 0,2V. Essayons de retrouver cette valeur à partir de la fonction de transfert :

$$v_s(t) = A_1 G(500\text{Hz}) \cos(\omega t + \varphi_1) + \frac{A_1}{3} G(1500\text{Hz}) \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\text{or } G(1500\text{Hz}) = |K| = H_0 = 2$$

$$\text{et } G(500\text{Hz}) = H_0 = \frac{2}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{500}{1500} - \frac{1500}{500} \right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \left( \frac{1}{2 \times 0,05} \right)^2 \left( \frac{1}{3} - 3 \right)^2 \cdot 10^{-2}}} \approx 7,5$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{A_1}{3} G(1500)}{A_1 G(500)} = \frac{2}{3 \times 7,5 \cdot 10^2} = 8,9$$

On peut comparer à la valeur expérimentale :  $\frac{1}{0,2} = 5$  accord partiel seulement car la lecture précise difficile.

### 3 Oscillations d'un système complexe

1. Quand l'objet de masse  $m$  descend, le ressort s'allonge et augmente la tension du fil (principe des actions réciproques, la force de rappel du ressort augmentant alors), jusqu'à ce qu'elle devienne plus grande en norme que le poids  $m\vec{g}$ . La masse remonte alors, le ressort raccourcit et diminue la tension du fil, jusqu'à ce qu'elle devienne plus petite en norme que le poids  $m\vec{g}$ . La masse redescend alors, et ainsi de suite : on a donc des oscillations.
2. **Système** : {ressort, poulie, objet de masse  $m$ , fil}.

**Référentiel** :  $\mathcal{R}$  lié au sol, supposé galiléen.

**Étude cinétique** :

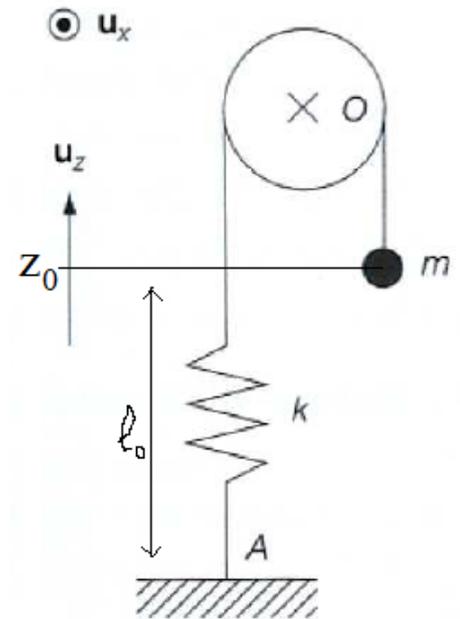
La position du système est repérée par la position du centre  $O$  de la poulie et l'angle  $\theta$  correspondant à la rotation de la poulie.

Or le fil ne glisse pas sur la poulie donc la vitesse d'un point du fil est la même que celle d'un point de la périphérie de la poulie :  $\dot{z} = +R\dot{\theta}$  (avec  $\theta$  orienté dans le sens direct).

Il n'y a donc qu'un seul degré de liberté. Une étude énergétique est particulièrement pertinente.

Évaluons l'énergie cinétique :

- pour l'objet de masse  $m$  :  $E_{c,1} = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$  ;
- pour la poulie en rotation autour de l'axe  $Oz$  fixe dans  $\mathcal{R}$  :  
 $E_{c,2} = \frac{1}{2}J_{Ox}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}J_{Ox}\frac{\dot{z}^2}{R^2}$ .



**Bilan des actions mécaniques** :

Les actions mécaniques extérieures sont :

- la pesanteur s'exerçant sur l'objet de masse  $m$  :  $E_{p,pes,1} = mgz + C^{te}$  ( $\vec{e}_z$  vers le haut).
- la pesanteur s'exerçant sur la poulie :  $E_{p,pes,2} = C^{te}$  (centre de masse  $O$  fixe dans  $\mathcal{R}$ ) ;
- la liaison de la poulie, supposée parfaite : puissance nulle, donc travail nul.
- le contact avec le sol en  $A$  : puissance nulle car le point d'application  $A$  est fixe dans  $\mathcal{R}$ .

Ainsi,  $E_{p,ext} = mgz + C^{te}$  et  $W_{nc,ext} = 0$ .

Le travail des actions mécaniques intérieures est plus délicat :

- le fil est souple et change de forme sans effort (sauf au niveau du ressort) ;
- le ressort emmagasine l'énergie potentielle élastique  $E_{p,el} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(-z + z_0)^2$   
 $(\ell = -z + C^{te}$  : si  $z$  augmente alors  $\ell$  diminue ; on choisit  $C^{te} = \ell_0 + z_0$ , d'où  $z = z_0$  si  $\ell = \ell_0$ ) ;
- le contact entre la poulie et le fil s'effectue sans glissement donc sans dissipation d'énergie.

Ainsi,  $E_{p,int} = \frac{1}{2}k(-z + z_0)^2$  et  $W_{nc,int} = 0$ .

On notera que la force de tension du fil ne travaille pas sur l'ensemble du fil car le travail de la force de tension qui s'exerce sur un côté d'un élément  $dl$  du fil est exactement compensé par celui de la force qui s'exerce sur l'autre côté (le fil est inextensible et la tension se conserve tout le long du fil).

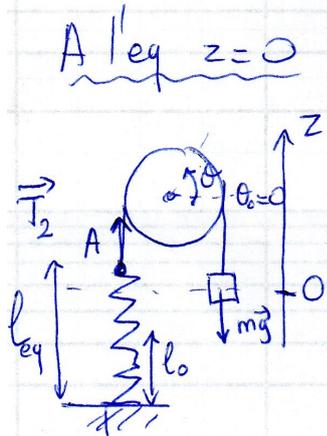
**Application du théorème de l'énergie mécanique** :  $\Delta E_m = W_{nc,ext} + W_{nc,int} = 0 \Rightarrow E_m = C^{te}$

Or  $E_m = E_c + E_p$  donc  $E_m = mgz + \frac{1}{2}k(-z + z_0)^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}J_{Ox}\left(\frac{\dot{z}}{R}\right)^2 = C^{te}$

Dérivons par rapport à  $t$  :  $mg\dot{z} - k\dot{z}(-z + z_0) + m\ddot{z}\dot{z} + J_{Ox}\frac{1}{R^2}\ddot{z}\dot{z} = 0$  d'où (simplification par  $\dot{z}$ ) :

$$\boxed{\ddot{z} + \omega_0^2 z = kz_0 - mg} \text{ avec } \boxed{\omega_0 = \frac{k}{m + \frac{J_{Ox}}{R^2}}} \text{ soit une période des oscillations : } \boxed{2\pi\sqrt{\frac{m}{k} + \frac{J_{Ox}}{kR^2}}}.$$

Autres méthodes et compléments :



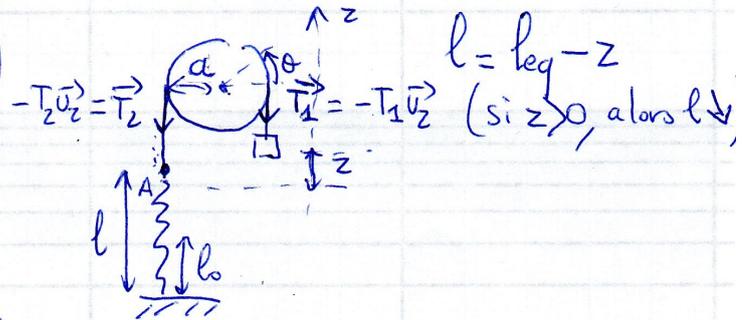
PFD à A à l'éq:

$$0 = -k(l_{eq} - l_0) + T_2$$

$$\Rightarrow l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k} > l_0 \quad \text{OK}$$

*mg à l'éq car A inextensible et parfaite*

Hors eq



PFD hors eq

$$0 = -k(l - l_0) + T \neq mg \text{ hors eq.}$$

$$\Rightarrow \textcircled{Pb}$$

TMC à {partie} dans  $R_y$

$$J\ddot{\theta} = -T_1 a + T_2 a$$

$$\text{or } a\dot{\theta} = \dot{z}$$

PFD à {m} dans  $R_y$ :

$$m\ddot{z} = T_1 - mg$$

$$\Rightarrow T_1 = m(\ddot{z} + g)$$

PFD à {A} dans  $R_y$

$$0 = -k(l - l_0) + T_2$$

pas de masse

$$\Rightarrow T_2 = k(l - l_0) = k\left(\frac{mg}{k} - z\right)$$

$$\Rightarrow \frac{J\ddot{z}}{a} \Rightarrow m(\ddot{z} + g)a + ka\left(\frac{mg}{k} - z\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{z} \left( \frac{J}{a} + ma \right) + ka z = -mag + mag \quad 0$$

$$\left| \ddot{z} + \frac{k}{m} \times \left( \frac{1}{1 + \frac{J}{ma^2}} \right) z = 0 \right|$$

$\Rightarrow$  oscillations autour de la position d'équilibre  $\Rightarrow$  normal de ne pas avoir de second membre.

## Méthode énergétique

TPM à { poulie + fil + ressort + masse } :

$\frac{dE_m}{dt} = 0$  (pas de forces non conservatives)  
 Les solides sont indéformables et le point d'attache en bas du ressort est fixe  $\Rightarrow$  la puissance dissipée y est nulle.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + mgz + \frac{1}{2} k (l - l_0)^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{J \ddot{\theta} \ddot{\theta}}_{\frac{\dot{z}}{a}} + \underbrace{m \ddot{z} \dot{z}}_{\frac{\dot{z}}{a}} + mg \dot{z} + k \left( \frac{mg}{k} - z \right) \times (-\dot{z}) = 0$$

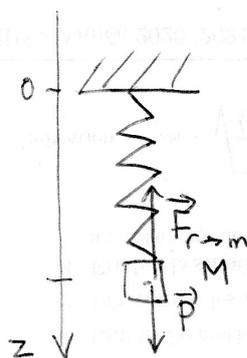
$$\Rightarrow \frac{J}{a^2} \dot{z} + m \dot{z} + kz + mg - mg = 0$$

$$\Rightarrow \dot{z} \left( 1 + \frac{J}{ma^2} \right) + \frac{k}{m} z = 0$$

$$\Rightarrow \left[ \ddot{z} + \frac{k}{m} \times \frac{1}{\left( 1 + \frac{J}{ma^2} \right)} z = 0 \right] \text{ (OK)}$$

Remarque: on vérifie que lorsque la poulie a une grande inertie,  $\omega_0$  est plus faible; ceci est cohérent.

Remarque sur le choix du système dans le cas masse-ressort sans masse :



PFD à  $\{m\}$

$$m \ddot{z} = +mg - k(z - l_0)$$

Energie mécanique de  $\{m\}$

$$E_m = E_c + E_{p\text{ pesanteur}}$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_r) = \vec{F}_r \cdot \vec{v}(M)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz \right] = -k(z - l_0) \dot{z}$$

↑  
axe z vers le bas



PFD à  $\{m + \text{ressort}\}$  sans masse.

$$m \ddot{z} = mg + \vec{F}_{\text{ressort}} \cdot \vec{u}_z$$

↳ centre de masse du système qui s'identifie à celle de m.

$$\text{or } \vec{F}_{\text{plafond} \rightarrow \text{ressort}} = -\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow \text{plafond}} = -k(z - l_0) \vec{u}_z$$

(on rappelle qu'on peut montrer que les forces s'exerçant de chaque côté d'un ressort sans masse sont opposées)

Energie mécanique de  $\{m + \text{ressort}\}$

$$E_m = E_c + E_{p\text{ pesanteur}} + E_{p\text{ élastique}}$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{plafond} \rightarrow \text{ressort}}) = \vec{F}_{\text{plafond} \rightarrow \text{ressort}} \cdot \vec{v}_A = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz + \frac{1}{2} k(z - l_0)^2 \right] = 0$$

les 2 systèmes sont bien équivalents (heureusement!)

Il est donc équivalent de dire que  $E_{p\text{ élastique}}$  correspond à l'énergie potentielle d'un point soumis à la force de rappel ou à l'énergie potentielle du ressort lui-même.

### 4 Oscillations d'un système lesté

1. Plusieurs méthodes possibles (ou impossibles...) :

(a) PFD au système  $\{M + m + D + \text{fil}\}$  ne convient pas car  $\vec{F}_{\text{axe} \rightarrow D}$  inconnue.

(b) TMC à M par rapport à O fixe dans  $\mathcal{R}$  galiléen ne convient pas on ne connaît pas  $\vec{F}_{D \rightarrow M}$  (fixation rigide avec une force dont la direction et la norme dépendent de  $\theta$ ).

- (c) TMC au système  $\{M + m + D + fil\}$  par rapport à O fixe dans  $\mathcal{R}$  galiléen (on rappelle qu'on ne comptabilise que les moments des forces **extérieures**, d'où l'intérêt de choisir un système qui escamote le problème en regroupant le disque et M) :

$$\frac{d\vec{L}_O(M + m + D + fil)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(m\vec{g}) + \vec{\mathcal{M}}_O(M\vec{g}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{axe \rightarrow D})$$

On calcule alors chacun des ces termes séparément en utilisant l'additivité des moments cinétiques :

$$\vec{L}_O(M) = O\vec{M} \wedge M\vec{v}(M) = a\vec{u}_r \wedge Ma\dot{\theta}\vec{u}_\theta = Ma^2\dot{\theta}\vec{u}_x$$

de même  $\vec{L}_O(m) = ma^2\dot{\theta}\vec{u}_x$

$$\vec{L}_O(D) = J\dot{\theta}\vec{u}_x$$

$$\vec{L}_O(fil) = \vec{0} \quad \text{car il s'agit d'un fil sans masse}$$

Par ailleurs, en utilisant les bras de levier  $\vec{\mathcal{M}}_O(M\vec{g}) = -Mga \sin(\theta)\vec{u}_x$

et  $\vec{\mathcal{M}}_O(m\vec{g}) = mga\vec{u}_x$

et  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{axe \rightarrow D}) = \vec{0}$  car cette force s'exerce en O.

Finalement  $\boxed{(J + Ma^2 + ma^2)\ddot{\theta} = mga - Mga \sin(\theta)}$

- (d) TMC au système  $\{M + D\}$  par rapport à O fixe dans  $\mathcal{R}$  galiléen :

$$\frac{d\vec{L}_O(M + D)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(M\vec{g}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{axe \rightarrow D}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T})$$

où  $\vec{T}$  est la tension du fil tendu par m et s'appliquant au bord du disque.

Le seul nouveau terme est :  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = a \|\vec{T}\| \vec{u}_x = aT\vec{u}_x$

Afin de déterminer la norme de  $\vec{T}$ , il faut appliquer le PFD à  $\{m\}$  dans  $\mathcal{R}$  galiléen en projection sur l'axe vertical

$$m\ddot{z} = -mg + T$$

Or  $\dot{z} = -a\dot{\theta}$  donc  $\ddot{z} = -a\ddot{\theta}$  et  $T = -ma\ddot{\theta} + mg$ . **Attention,  $T \neq mg$  car le système est hors équilibre!**

Ainsi :

$$\boxed{(J + Ma^2)\ddot{\theta} = -Mga \sin(\theta) + a(-ma\ddot{\theta} + mg)}$$

On retrouve bien le même résultat.

- (e) TPM au système  $\{M + m + D + fil\}$  (on notera qu'il faut ici tenir compte des interactions extérieures et **intérieures** s'il y en a) :

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum \mathcal{P}(F_{nc})$$

$$\frac{d}{dt}(E_{c,M+m+D} + E_{p,m+M}) = \vec{F}_{axe \rightarrow disque}$$

$$E_{c,M+m+D} = \frac{1}{2}mv^2(m) + \frac{1}{2}Mv^2(M) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

$$E_{p,m+M} = mgz(m) + Mgz(M) = -mga\theta - Mga \cos(\theta)$$

On a  $\sum P(F_{nc}) = 0$  car les forces non conservatives sur l'axe et internes ne travaillent pas ici, donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}j\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Ma^2\dot{\theta}^2 - mga\theta - Mga \cos(\theta)\right) = 0. \text{ Finalement :}$$

$$\boxed{(ma^2 + Ma^2 + J)\ddot{\theta} = mga - Mga \sin(\theta)}$$

On retrouve à nouveau le même résultat.

2. Le système est à l'équilibre pour  $\ddot{\theta} = 0$ , soit  $mga - Mga \sin(\theta_{eq}) = 0$ , et donc pour  $\sin(\theta_{eq}) = \frac{m}{M}$ .
3. Si  $m > M$ , il n'y a pas de position d'équilibre, sinon on a deux positions d'équilibres  $\theta_{eq,1} = \arcsin\left(\frac{m}{M}\right) < \pi/2$  et  $\pi/2 < \theta_{eq,2} = \pi - \arcsin\left(\frac{m}{M}\right) < \pi$ .  $\theta_{eq,1}$  est stable et  $\theta_{eq,2}$  est instable. On pose  $\theta = \theta_{eq,1} + \epsilon$  et en injectant dans l'équation du mouvement, on se ramène à un oscillateur harmonique du type  $\ddot{\epsilon} + \omega_0^2 \epsilon = 0$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{M \frac{g}{J a} \cos\theta_{eq,1}}{M + m + \frac{1}{a^2}}}$$

5 Détection d'une exoplanète : *Proxima Centauri b* (facultatif)

Q41 Substituons P à A dans la précédente expression

$$(M_E + M_P) \vec{PG} = M_E \vec{PE} + M_P \vec{PP}$$

$$\text{donc } \vec{GP} = \frac{M_E}{M_E + M_P} \vec{EP}$$

Cas particulier : si  $M_E \gg M_P$  alors

$\frac{M_E}{M_E + M_P} \approx \frac{M_E}{M_E} = 1$  et  $G = E$  le barycentre est localisé au centre de l'étoile

$$\text{si } M_E = M_P \quad \vec{GP} = \frac{M_E}{2M_E} \vec{EP} = \frac{\vec{EP}}{2}$$

donc le barycentre est localisé à l'équidistance des 2 astres.

Q42 On étudie la planète dans le référentiel du centre de masse supposé galiléen.

Écrire des actions mécaniques : force de pesanteur  $\vec{F}_{E \rightarrow P} = -\frac{G M_E M_P}{EP^3} \vec{EP}$

Principe fondamental de la dynamique

$$M_P \frac{d^2 \vec{GP}}{dt^2} = -\frac{G M_E M_P}{EP^3} \vec{EP}$$

$$\text{On } \vec{GP} = \frac{M_E}{M_E + M_P} \vec{r} \quad \text{donc } \frac{M_E}{M_E + M_P} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{G M_E \vec{r}}{r^3}$$

Finalement :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -G(M_E + M_P) \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Q43 F possède un mouvement circulaire uniforme. Décrivons le dans la base plane  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

$$\vec{r} = r \vec{u}_r$$

$$\vec{v} = v \vec{u}_\theta$$

constante  $v = r\dot{\theta} = r \frac{2\pi}{T}$

$$\vec{a} = -r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \vec{u}_r$$

$$G(M_E + M_P) \frac{1}{r^2} = r \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2$$

il vient alors 
$$\frac{G(M_E + M_P)}{r^2} = r \frac{4\pi^2}{T^2}$$

et donc 
$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G(M_E + M_P)}{4\pi^2}$$

On retrouve la loi des périodes (de Kepler)

Q44 E appartient à la droite GP en rotation uniforme autour de G. E est le plus à distance constante de G (car  $r \frac{d\vec{E}}{dt}$  est constant et  $\|\vec{GP}\| = \frac{M_E}{M_E + M_P} \|\vec{r}\|$  est constant). Donc E est en rotation uniforme autour de G.

$$v_E = r_E \dot{\theta} \hat{u}_\theta$$

$\hat{u}_\theta$   
 $\uparrow$   
 $\parallel \vec{G}_E \parallel$   
 $\frac{r_P}{r_E}$   
 $\uparrow$   
 $\frac{2\pi}{T}$

Evaluons  $\parallel \vec{G}_E \parallel$  :  $\vec{G}_E = - \frac{M_P}{M_E} \vec{G}_P$

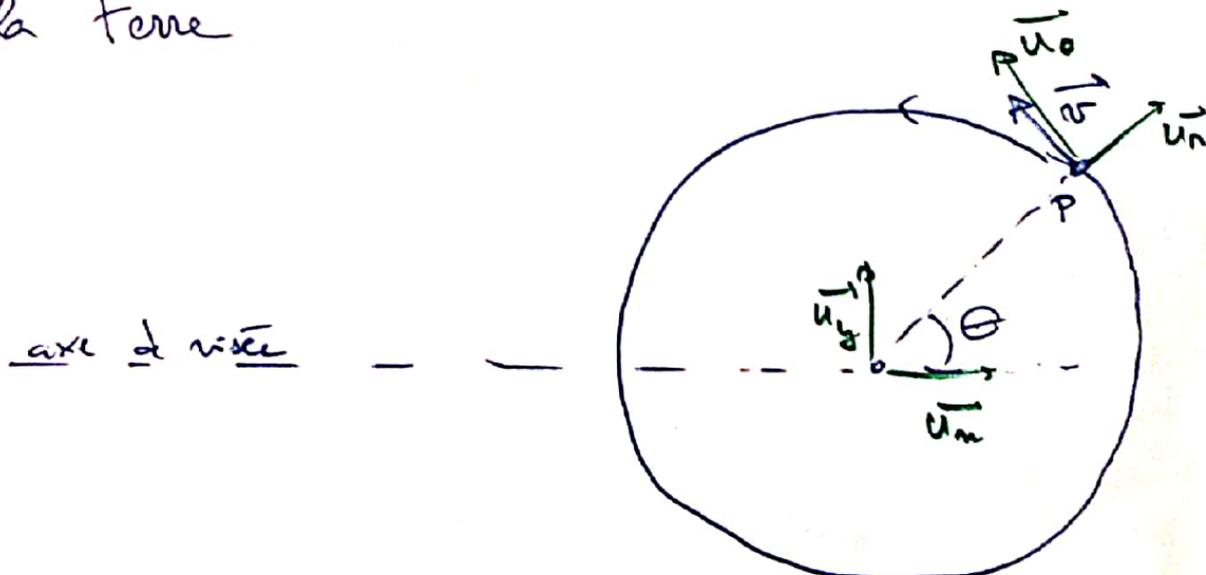
et  $\vec{G}_P = \frac{M_E}{r^2} \hat{r}$

donc  $\parallel \vec{G}_E \parallel = \frac{M_P}{M_E} \frac{M_E}{M_E + M_P} r$

$= \frac{M_P}{M_E + M_P} r$

et  $v_E = \frac{M_P}{M_E + M_P} r \frac{2\pi}{T}$

Q45 Evaluons  $V_H$  la projection de la vitesse de la planète selon l'axe de visée depuis la terre



$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{v} \cdot \vec{u}_\alpha = v \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_\alpha \\ &= -v \sin \theta \\ &= -\frac{M_p}{M_E + M_p} \cdot \frac{2\pi r}{T} \sin \theta(t) \end{aligned}$$

$$\text{on } r = \sqrt[3]{\frac{G(M_E + M_p)}{a \pi^2} T^2}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } V &= \frac{-M_p}{M_E + M_p} \frac{G^{1/3} T^{2/3} 2\pi}{(2\pi)^{2/3} T} \sin \theta (M_E + M_p)^{1/3} \\ &= \frac{-M_p}{(M_E + M_p)^{2/3}} \frac{G^{1/3} (2\pi)^{1/3}}{T^{1/3}} \sin \theta(t) \end{aligned}$$

$$\text{et } \frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} = -\left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{1/3} \frac{M_p \sin \theta(t)}{(M_E + M_p)^{2/3} c}$$

$$\text{où } \theta(t) = \omega \times t$$

A l'inverse de l'expression proposée par le Pr Bouchy, cette écart relatif en fréquence dépend de  $t$  (ce qui est cohérent puisque  $V$  dépend de  $t$ ). Notons de plus qu'on a supposé l'axe de visée dans le plan de la trajectoire, ce qui revient à dire que  $i = \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin i = 1$ . Enfin, la formule de l'énoncé se simplifie dans le cas des trajectoires circulaires, par

$$e = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta f}{f} = - \frac{(2\pi G)^{1/3}}{T} \frac{M_p}{(M_p + M_E)^{2/3}} \frac{1}{c}$$

C'est l'amplitude de variation de fréquence due à l'effet Doppler, pas la variation instantanée, l'énoncé ne l'avait pas précisé.

Q46 Supposons  $M_p \ll M_E$

$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right| = \left| \frac{v}{c} \right| = \left| - \frac{(2\pi G)^{1/3}}{T} \frac{M_p}{M_E^{2/3}} \frac{1}{c} \right|$$

$$M_p = \frac{M_E^{2/3} T^{1/3} v}{(2\pi G)^{1/3}}$$

On compte 7 périodes en 75 jours :

$$T \approx \frac{75 \times 24 \times 60 \times 60}{7} = 9 \cdot 10^5 \text{ s}$$

L'amplitude de  $v$  est évaluée en mesurant l'écart crête-à-crête divisé par 2 :

$$v \approx \frac{15}{2} \approx 8 \text{ km/h} = 3200 \text{ m/s}$$

Ce qui donne  $M_p = 1 \times 10^{25} \text{ kg}$ , ce qui est bien l'ordre de grandeur attendu ( $6 \cdot 10^{24} \times 1,3 = 8 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ )