

DS n°1bis (Centrale - Mines)
 (Samedi 30 septembre 2023 - Durée 4h)

1 Accordeur de guitare

Nous allons étudier quelques aspects de l'accordeur électronique d'une guitare qui comporte les six cordes traditionnelles qui, lorsqu'elles sont bien accordées, possèdent les fréquences suivantes :

| Corde | Fréquence f_{ac} |
|----------|--------------------|
| Mi grave | 82,4 Hz |
| La | 110,0 Hz |
| Ré | 146,8 Hz |
| Sol | 196,0 Hz |
| Si | 246,9 Hz |
| Mi aigu | 329,6 Hz |

On souhaite accorder une corde légèrement désaccordée de fréquence f_{co} . Le principe de fonctionnement de l'accordeur est le suivant :

- Sélection de la corde à accorder (f_{ac} est donc fixée par le choix de la corde).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence f_{ac} avec un oscillateur de type astable.
- Enregistrement du signal $u_e(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplification assez faible, de fréquence f_{co} .
- Amplification de ce signal et filtrage.
- Extraction de la fréquence fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence f_{co} .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences f_{ac} et f_{co} . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand $f_{co} = f_{ac}$.

Informations sur l'amplificateur opérationnel :

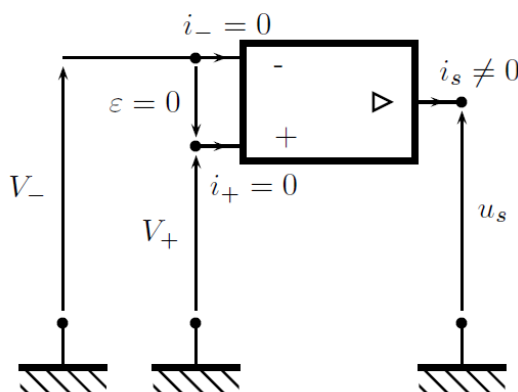


FIGURE 1 – Amplificateur opérationnel idéal utilisé en régime linéaire

L'amplificateur opérationnel est un amplificateur différentiel. Il est alimenté en ± 15 V par rapport à la masse. Cette alimentation est à l'origine de l'énergie demandée au niveau de la sortie. L'amplificateur opérationnel idéal présente de très fortes impédances d'entrée, les courants en entrée sont extrêmement faibles (comme pour un circuit multiplieur par exemple). On considère que :

$$i_+ = i_- = 0$$

L'amplificateur opérationnel présente deux types de fonctionnement : le **régime linéaire** où la tension de sortie est reliée à la tension différentielle d'entrée ε par la loi (1) donnée ci-dessous et le **régime non linéaire** où la tension de sortie sature au niveau des tensions ± 15 V = $\pm V_{\text{sat}}$. C'est cette alimentation qui permet de fournir de la puissance en sortie en assurant un courant d'intensité i_s pouvant aller à des ordres de grandeurs de dizaines de milliampères. La relation entrée différentielle - sortie du domaine linéaire est modélisée par une fonction passe-bas d'ordre 1 :

$$u_s = \underline{\mu} \varepsilon = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \varepsilon \quad (1)$$

avec $\mu_0 \simeq 10^6$ et $\omega_0 \simeq 10^2 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Ainsi en considérant, dans le cadre du modèle d'amplificateur opérationnel idéal, que le gain $\mu_0 \rightarrow \infty$, on n'obtient une sortie bornée que si $\varepsilon = 0$, donc

$$\text{en régime linéaire : } \varepsilon = 0 \quad \text{soit} \quad V_+ = V_-$$

En fonctionnement non linéaire, on a $u_s = +V_{\text{sat}}$ lorsque $\varepsilon > 0$ et $u_s = -V_{\text{sat}}$ lorsque $\varepsilon < 0$.

A. Le signal

La figure 2 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

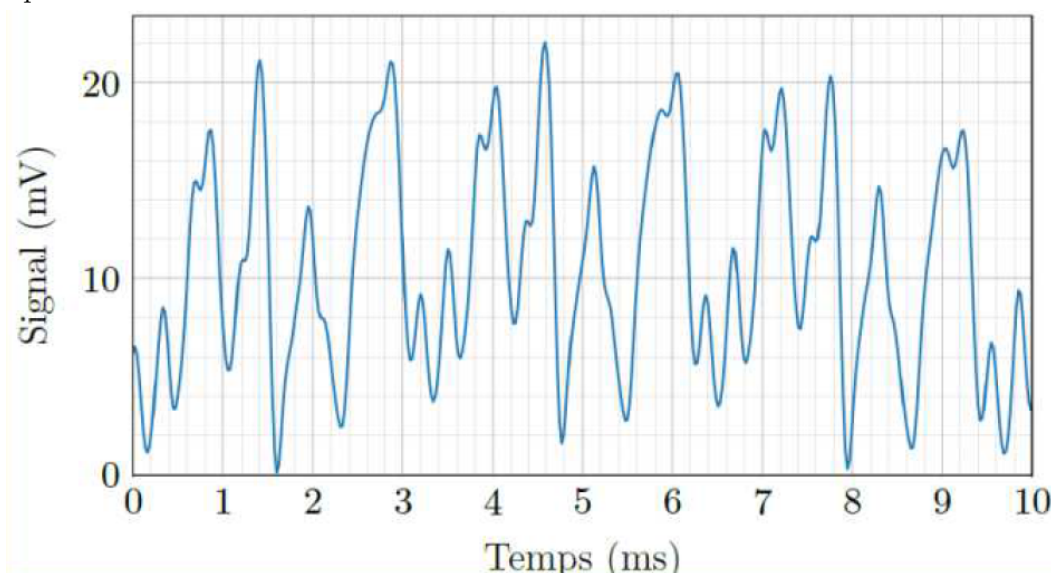


FIGURE 2 – Signal de la guitare

1. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.
2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (si on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).

3. De quelle corde de guitare s'agit-il ?
4. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

B. Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre (F_a) de la figure 3.

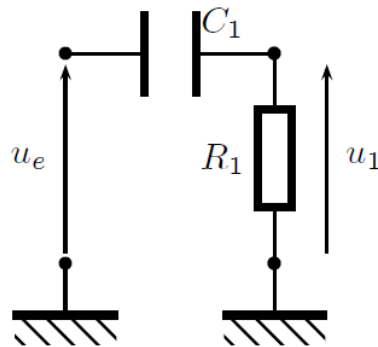


FIGURE 3 – Filtre (F_a)

5. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1 , C_1 et de la pulsation ω de ce signal.
6. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.
7. Tracer sans calcul l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.
8. On a choisi $R_1 = 100\text{k}\Omega$ et $C_1 = 100\text{nF}$. Calculer la fréquence de coupure f_1 à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la figure 2, quel est le rôle de ce premier filtre ?

C. Deuxième filtre

Dans cette partie, les signaux sont sinusoïdaux et les amplificateurs linéaires intégrés (ALI) sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire. On étudie les filtres de la figure 4.

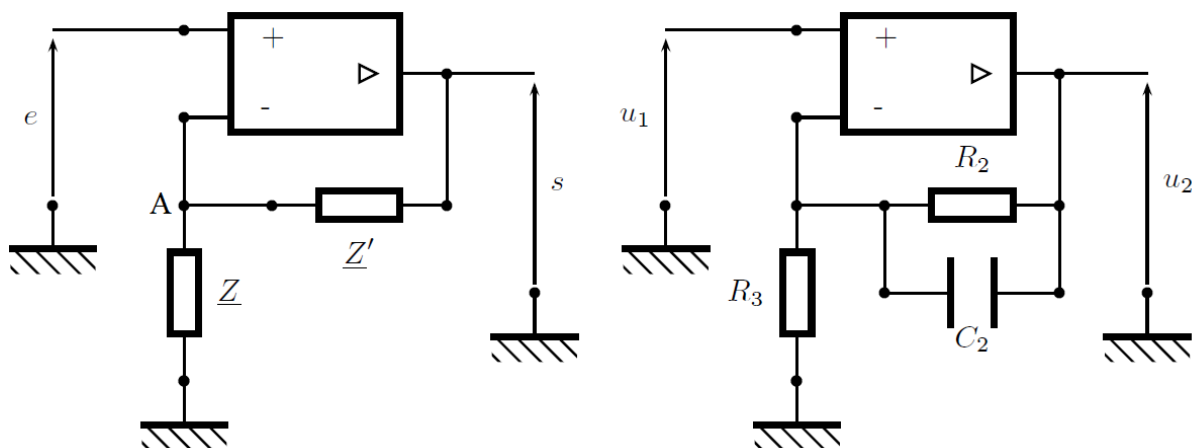


FIGURE 4 – Deuxième filtre (à droite) (F_b)

9. Soit le filtre de la figure 4 à gauche. Montrer que sa fonction de transfert \underline{H} est donnée par¹ :

$$\underline{H} = 1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}}$$

Que devient \underline{H} si les impédances sont $\underline{Z} = R$ et $\underline{Z}' = R'$? Quel serait dans ce cas l'intérêt du montage?

En réalité, en sortie du filtre (F_a), le signal $u_1(t)$ est envoyé sur le filtre (F_b) de la figure 4 à droite.

10. Quelle est l'impédance \underline{Z}_{eq} de la branche constituée par R_2 en parallèle avec C_2 ?
 11. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}_2 = \frac{u_2}{u_1}$ de ce filtre en fonction de R_2, R_3 et C_2 .
 12. Mettre \underline{H}_2 sous la forme :

$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2}$$

et donner les expressions de G_0 et ω_2 .

13. Quelle est la limite de $|\underline{H}_2|$ en basse fréquence? en haute fréquence?
 14. Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à ω_2 si $R_2 = 680\text{k}\Omega, R_3 = 6\text{k}\Omega$ et $C_2 = 470\text{pF}$ ainsi que son gain G_0 . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

D. Filtrage sélectif

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_2 , dont la valeur est a priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnées sur l'accordeur f_{ac} (on suppose la corde légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aiguë que l'on souhaite accorder. Le principe du filtre (F_c) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac} . Ce type de commande (à capacité commutée) sera étudié dans la dernière partie du problème.

Diagramme de Bode

La figure 5 représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.

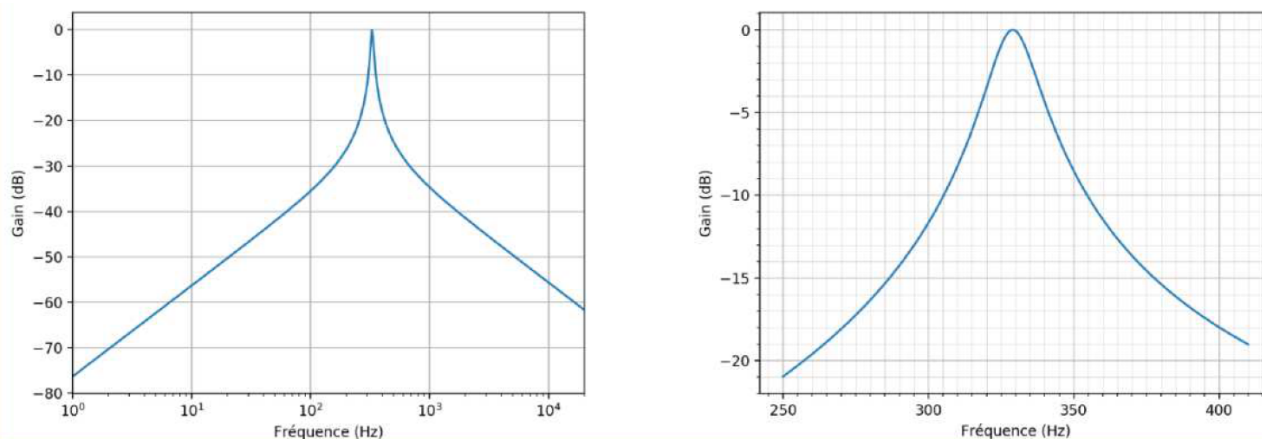


FIGURE 5 – Diagramme de BODE en gain du filtre (F_c)

1. On pourra par exemple utiliser la loi des nœuds en terme de potentiels

15. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?
16. Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB et de son facteur de qualité. Commenter.
17. Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315$ Hz, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

Analyse spectrale

La figure 6 correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté sur la figure 2 .

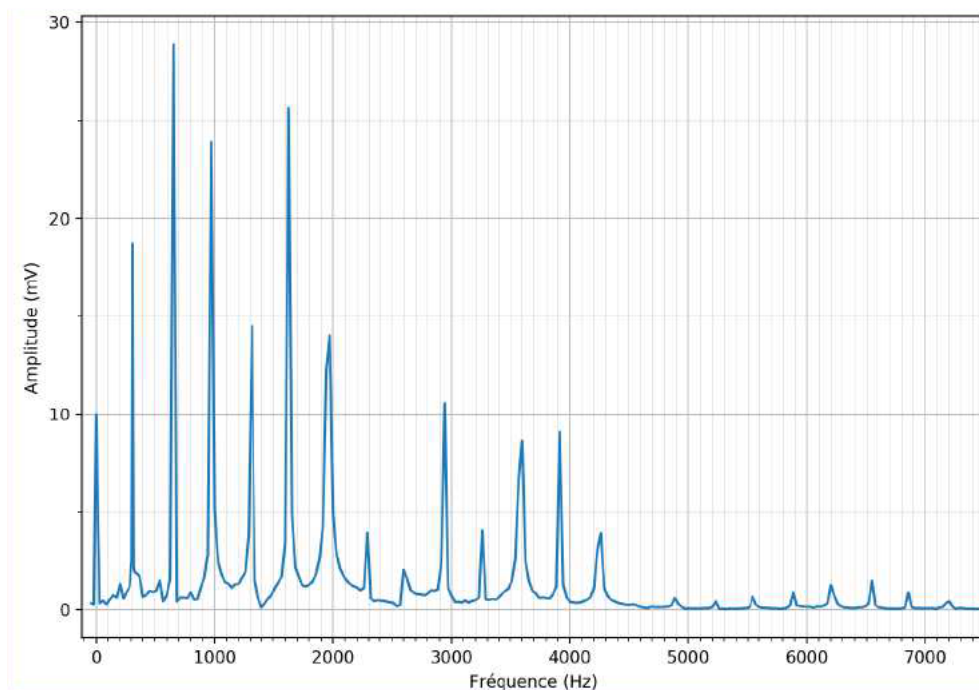


FIGURE 6 – Spectre du signal d'entrée

18. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la figure 2.
19. En le justifiant soigneusement, préciser quel spectre correspond à la sortie du premier filtre (F_a), parmi les 4 spectres présentés dans la figure 7.
20. Même question, pour la sortie du filtre (F_b).
21. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_c). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

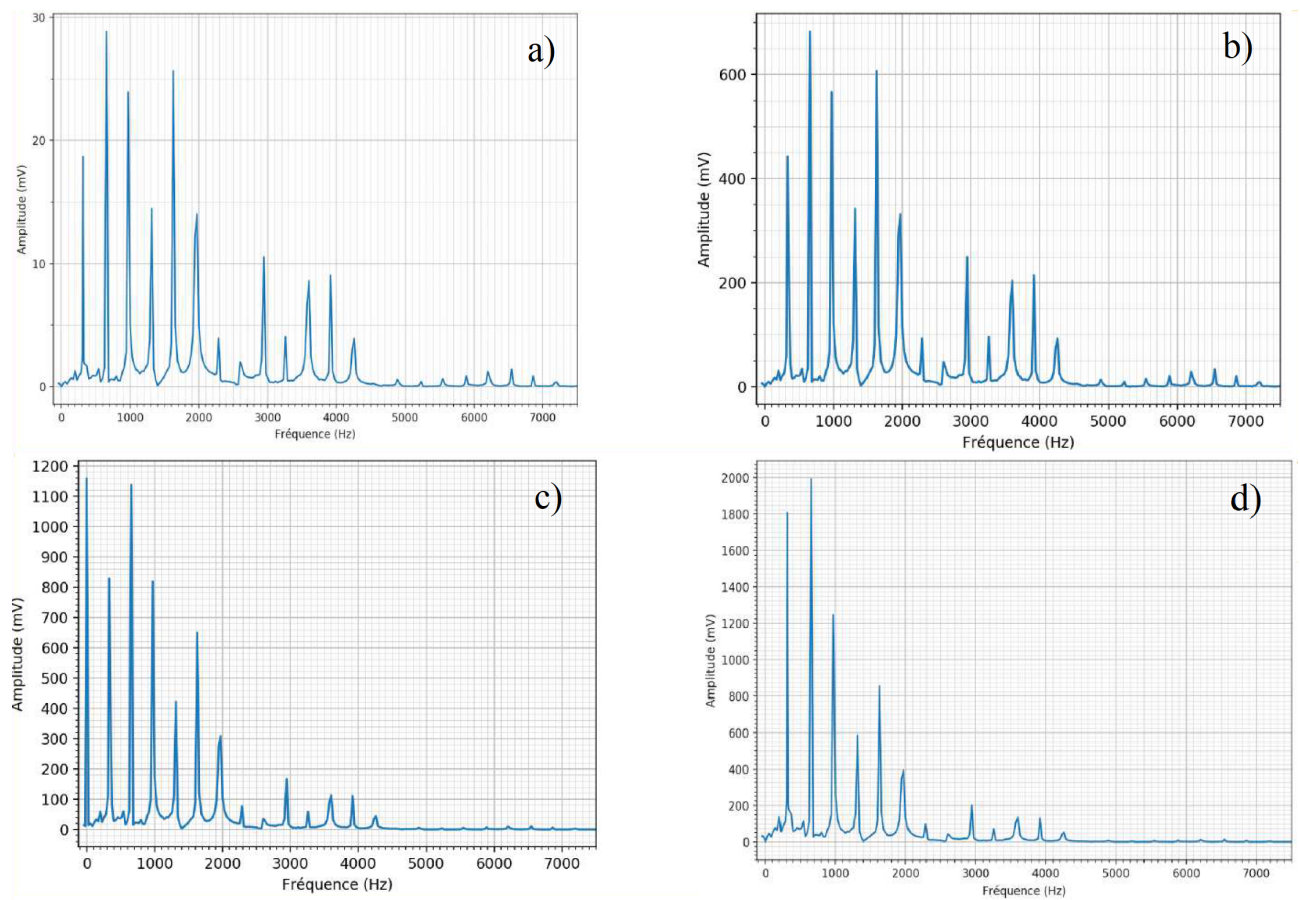


FIGURE 7 – Spectres (a), (b), (c) et (d).

2 Filtrage d'un enregistrement

- Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées. Elles nécessitent plus de temps pour élaborer un modèle ou un raisonnement, le barème en tient compte.

I.E – On souhaite enregistrer un signal musical avec une haute fidélité. Le signal à échantillonner possède des harmoniques très élevées, qui risquent de nuire à la qualité de l'enregistrement. Avant la numérisation, le signal doit être filtré. Un document en annexe fournit les spécifications du LMF100, qui est un composant intégré. Il réalise différents types de filtrages, selon les branchements qu'on lui applique. Dans ce document, la grandeur s est égale à $j\omega$ où ω est la pulsation des signaux sinusoidaux et $j^2 = -1$.

I.E.1) Quel type de filtre doit-on utiliser et pourquoi ? Préciser la bande de fréquences qu'il doit sélectionner.

I.E.2) Proposer une valeur de la fréquence d'échantillonnage adaptée à la situation.

I.F – Quatre essais ont été réalisés en laboratoire, à quatre fréquences différentes, avec un même filtre d'ordre 2 réalisé avec le LMF100. Sur les quatre oscillogrammes relevés figure 5, $s_2(t)$ désigne la tension de sortie du filtre et $s_1(t)$ la tension d'entrée.

Déduire de ces quatre essais la nature du filtre testé, ainsi que ses caractéristiques : fréquence propre, fréquence de coupure, facteur de qualité. Expliciter clairement la démarche et commenter les résultats obtenus.

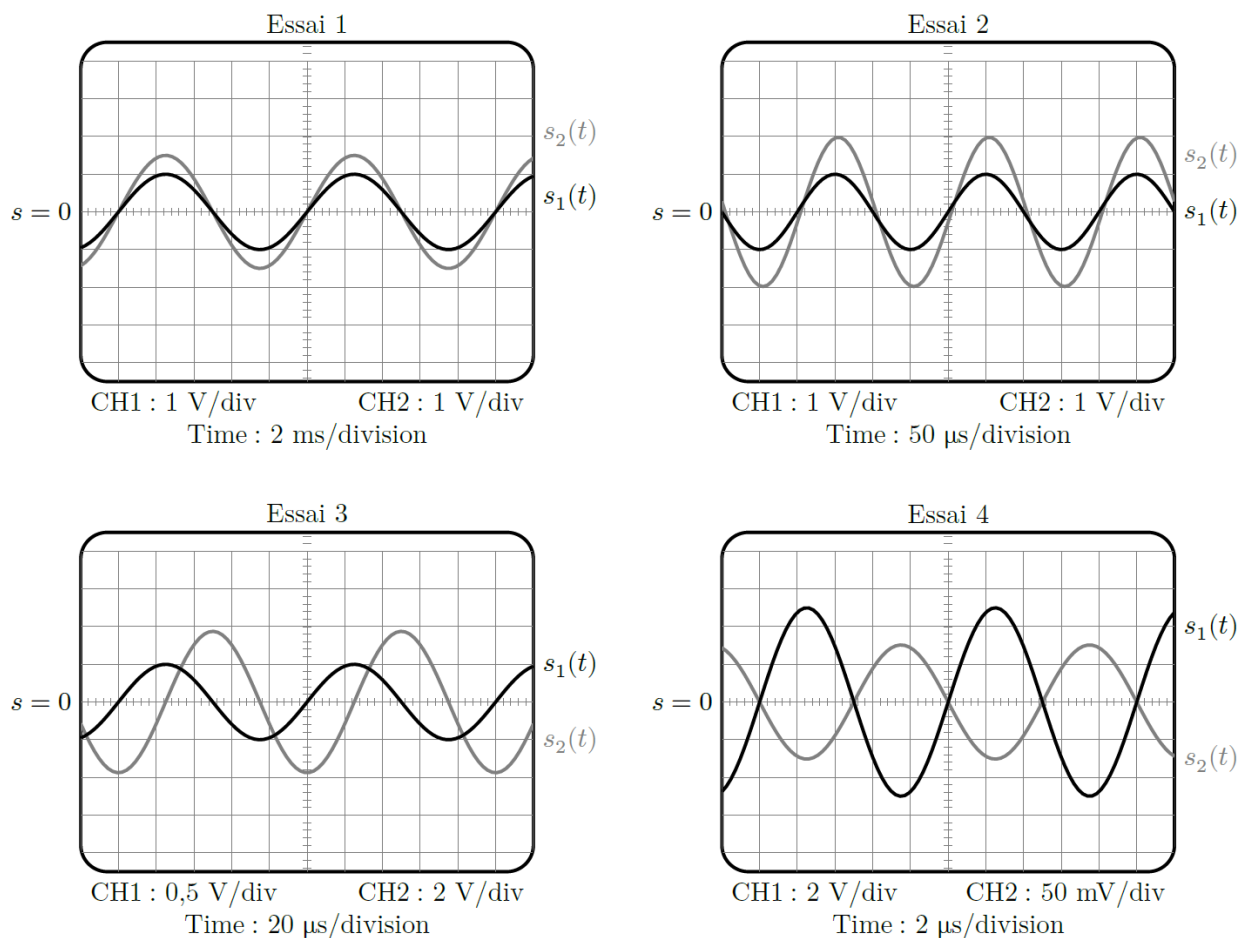
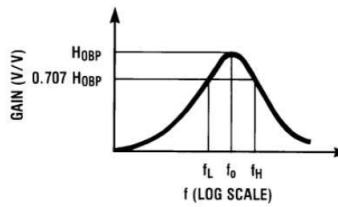


Figure 5

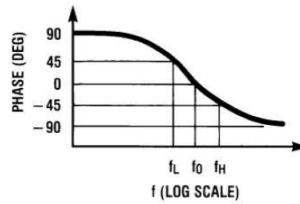
Annexe

Filtres réalisables avec le LMF100

$$H_{BP}(s) = \frac{H_{OBP} \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{s\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$



(a)



(b)

$$Q = \frac{f_0}{f_H - f_L}; f_0 = \sqrt{f_L f_H}$$

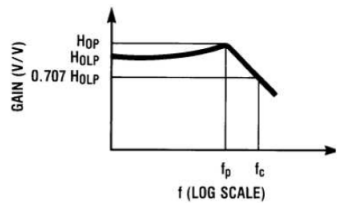
$$f_L = f_0 \left(\frac{-1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right)$$

$$f_H = f_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right)$$

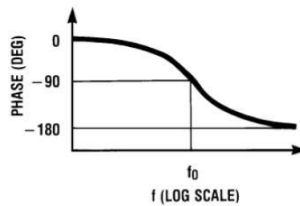
$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

FIGURE 1. 2nd-Order Bandpass Response

$$H_{LP}(s) = \frac{H_{OLP} \omega_0^2}{s^2 + \frac{s\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$



(a)



(b)

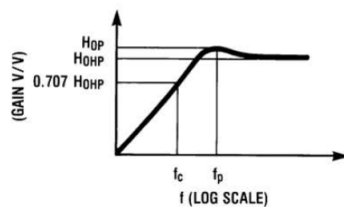
$$f_c = f_0 \times \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}}$$

$$f_p = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

$$H_{OP} = H_{OLP} \times \frac{1}{\frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

FIGURE 2. 2nd-Order Low-Pass Response

$$H_{HP}(s) = \frac{H_{OHP} s^2}{s^2 + \frac{s\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$



(b)

$$f_c = f_0 \times \left[\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}} \right]^{-1}$$

$$f_p = f_0 \times \left[\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \right]^{-1}$$

$$H_{OP} = H_{OHP} \times \frac{1}{\frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

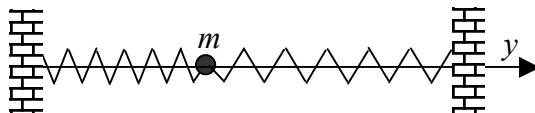
FIGURE 3. 2nd-Order High-Pass Response

3 MODÉLISATION D'UN OSCILLATEUR MÉCANIQUE

Soit un point matériel de masse m , en mouvement dans le champ de pesanteur \vec{g} uniforme. Le référentiel terrestre est supposé galiléen.

3.1 Étude énergétique d'un oscillateur

1. Définir l'énergie potentielle E_P associée à une force \vec{F} . Pour une force de rappel élastique de constante k et de longueur à vide L_0 , déterminer l'expression de l'énergie potentielle en fonction de l'écart x à la valeur nulle de la force, à une constante additive près.
2. On considère un mouvement conservatif de m sur l'axe horizontal Oy , autour d'une position d'équilibre Y_0 , avec l'énergie potentielle $E_P(y) = E_0 + \alpha(y - Y_0)^2$, où α est une constante positive. Établir l'équation différentielle du mouvement et en déduire qu'il s'agit d'oscillations harmoniques dont on précisera l'expression de la période T .
3. *Application* : considérons le dispositif horizontal de la figure suivante.

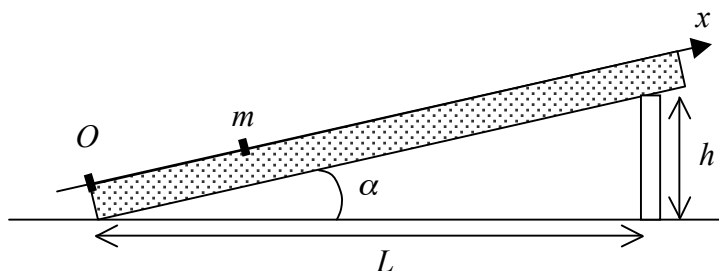


Les ressorts sont identiques, de raideur k et de longueur à vide L_0 , tandis que les points d'attache sont distants de $2L_0$. Exprimer $E_p(y)$ si y désigne l'écart à la position d'équilibre, et calculer la période T_0 des oscillations si $m = 200$ g et $k = 40$ N.m⁻¹.

4. On envisage l'existence d'un frottement fluide d'intensité proportionnelle à la vitesse de m par rapport à l'axe du mouvement : $\vec{f} = -\beta m \vec{v}$ où β est une constante positive. Donner la dimension ou l'unité SI de β .
5. Établir l'équation différentielle du mouvement. Quelle est la valeur numérique maximale β_{max} de β permettant les oscillations de m ?
6. Déterminer la solution de cette équation différentielle dans le cas où $\beta < \beta_{max}$, avec les conditions initiales : $y(0) = 0$; $dy/dt(0) = v_0$. Tracer l'allure de $y(t)$.

3.2 Modélisation d'un dispositif expérimental

On dispose d'un banc à coussin d'air rectiligne (Ox), incliné par une cale de hauteur h d'un angle α par rapport à l'horizontale, selon la figure ci-dessous. Sur ce banc, un aimant est fixé à l'origine O , et un autre aimant, de masse m , est fixé sur un palet mobile sans frottement :



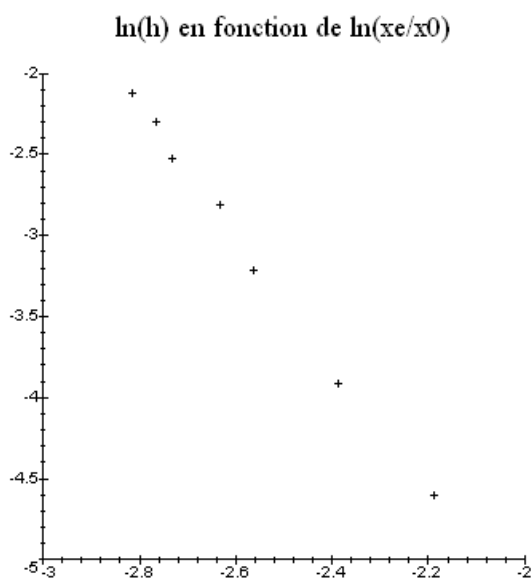
Les aimants sont orientés de telle sorte qu'ils se repoussent mutuellement. La possibilité pour m d'osciller autour d'une position d'équilibre résulte de la compétition entre la répulsion

électromagnétique, réduite à une force notée \vec{F} , prépondérante lorsque les aimants sont proches, et le poids, qui devient prépondérant lorsque la distance augmente.

1. Faire un bilan des forces à l'équilibre sur un schéma.
2. Sans connaissances préalables en électromagnétisme, on cherche dans la suite à vérifier si la force électromagnétique agissant dans cette expérience peut être modélisée par une loi de la forme : $\vec{F}(x) = k (x_0/x)^n \vec{e}_x$, avec $k > 0$ et n entier naturel. Exprimer dans cette hypothèse la position d'équilibre x_e en fonction de x_0 , k , m , g , L , h et n dans le cas des petits angles ($h \ll L$).

NB : cette approximation sera toujours utilisée dans la suite.

3. On mesure x_e pour différentes cales, puis on représente $\ln(h)$ en fonction de $\ln(x_e/x_0)$. En prenant $x_0 = 1$ m, déduire des mesures ainsi représentées ci-dessous les valeurs de n et de k . On donne : $L = 120$ cm ; $m = 189$ g ; $g = 9,81$ m.s⁻².



valeurs correspondantes :

| $\ln(x_e/x_0)$ | $\ln(h)$ |
|----------------|----------|
| -2,19 | -4,61 |
| -2,39 | -3,91 |
| -2,56 | -3,22 |
| -2,63 | -2,81 |
| -2,73 | -2,53 |
| -2,76 | -2,30 |
| -2,81 | -2,12 |

4. Exprimer littéralement l'énergie potentielle totale $E_P(x)$ de m , à une constante additive près, en fonction de x , x_0 , k , m , g , L , h et n , puis en fonction de x , x_0 , x_e , k et n seulement.
5. Lorsqu'on se limite à des oscillations de faible amplitude autour de la position d'équilibre, on rappelle qu'on peut utiliser pour l'énergie potentielle un développement limité à l'ordre 2, de la forme :

$$E_P(x) \approx E_P(x_e) + \frac{dE_P}{dx}(x_e)(x - x_e) + \frac{1}{2} \frac{d^2E_P}{dx^2}(x_e)(x - x_e)^2$$

En déduire une expression de l'énergie potentielle sous la forme :

$$E_P(x) \approx \frac{1}{2} K(x - x_e)^2 + \text{Cste}$$

Le détail de la constante additive n'est pas demandé, mais on exprimera la constante K en fonction de x_e , x_0 , k et n .

6. Justifier qu'au voisinage de l'équilibre, la résultante des forces subies par m équivaut à une force de rappel élastique dont on précisera la constante de raideur équivalente.

7. Toutes choses égales par ailleurs, montrer que la période T des petites oscillations autour de l'équilibre est proportionnelle à une puissance de h que l'on déterminera ; en déduire une méthode de mesure de n que l'on décrira succinctement.