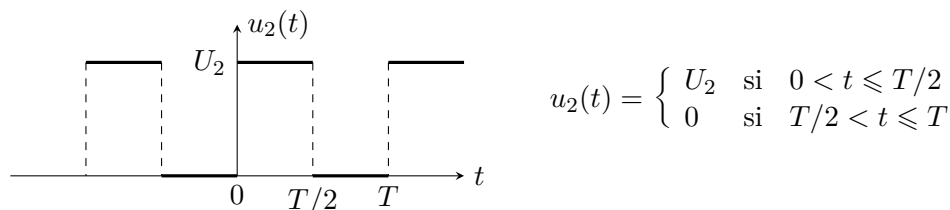


## Corrigé du DS n°1 CCINP - e3a

# 1 DIVERS ASPECTS DU FILTRAGE D'UNE TENSION PÉRIODIQUE

## A – Étude préliminaire

On dispose d'un générateur BF (basse fréquence) ; on utilisera ainsi deux tensions  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  de période  $T$  et de fréquence  $f = 1/T$ , définies comme suit :  $u_1(t) = U_1 \sin(2\pi ft)$  avec  $U_1 = 2 \text{ V}$  et :



avec  $U_2 = 2 \text{ V}$ .

On montre que  $u_2(t)$  est décomposable en série de Fourier selon :

$$u_2(t) = \frac{U_2}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2U_2}{\pi(2p+1)} \sin[(2p+1)2\pi ft]$$

**A1)** Par définition :

$$\langle u_1 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u_1(t) dt = \frac{U_1}{2\pi fT} [\cos(2\pi ft)]_0^T = 0$$

puisque  $fT = 1$  et par périodicité du cosinus. D'autre part :

$$\langle u_2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u_2(t) dt = \frac{U_2}{2}$$

**A2)** La valeur efficace  $U_{\text{eff}}$  d'un signal  $u(t)$  est définie par :

$$U_{\text{eff}}^2 = \langle u^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt$$

On a donc :

$$U_{1,\text{eff}}^2 = \frac{U_1^2}{T} \int_0^T \sin^2(2\pi ft) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T [1 - \cos(2\pi ft)] dt = \frac{U_1^2}{2}$$

d'où :

$$U_{1,\text{eff}} = \frac{U_1}{\sqrt{2}}$$

De même :

$$U_{2,\text{eff}}^2 = \frac{U_2^2}{T} \int_0^{T/2} dt = \frac{U_2^2}{2}$$

et donc :

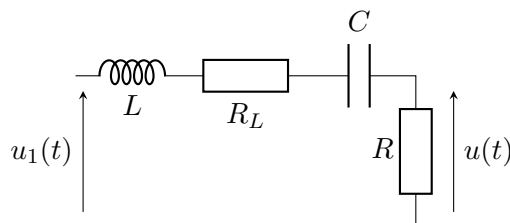
$$U_{2,\text{eff}} = \frac{U_2}{\sqrt{2}}$$

A.N.  $U_{1,\text{eff}} = U_{2,\text{eff}} = 1,4 \text{ V}$

### B – Étude d'un filtre en régime sinusoïdal forcé

On se propose de réaliser un filtre simple permettant d'isoler les diverses composantes sinusoïdales d'une tension périodique comme vérification expérimentale du théorème de Fourier.

Un dipôle est constitué par une bobine (inductance  $L$  et résistance interne  $R_L$  en série), un condensateur de capacité  $C$  et une résistance  $R$  en série. Il est alimenté par la tension sinusoïdale  $u_1(t)$ .



On étudie en régime sinusoïdal forcé la réponse  $u(t)$ , d'amplitude  $U_m$ , entre les bornes de la résistance  $R$ . On posera :

$$LC\omega_0^2 = 1 ; R' = R + R_L ; Q = \frac{L\omega_0}{R'}$$

**B1)** Par un théorème pont diviseur de tension on aboutit à :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R + R_L + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

que l'on peut mettre sous la forme canonique :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

avec :

$$H_0 = \frac{R}{R'} ; Q = \frac{L\omega_0}{R'} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

**B2)** On remarque que :

$$G = |\underline{H}| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

$G$  est maximal lorsque le dénominateur est minimal, ce qui se produit pour :

$$\left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = 0 \text{ soit } \boxed{\omega = \omega_0}$$

On a alors :

$$\boxed{G_{\max} = H_0 = \frac{R}{R'}}$$

A.N. :  $\omega_0 = 6,3 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  d'où  $f_0 = 1,0 \text{ kHz}$ .

**B3)** Il faut se souvenir de la manière de calculer une incertitude. Ici c'est l'incertitude relative qui se calcule facilement (cela tombe bien puisque cette incertitude relative est aussi la précision) :

$$\boxed{\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\Delta C}{C} \right)^2} = \frac{\Delta C}{2C} = 2,5\%}$$

**B4)** C'est un calcul classique de cours qu'on ne reproduira pas ici. On trouve :

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$$

Pour atténuer au mieux un signal de pulsation  $2\omega_0$ , il faut que celui-ci soit en dehors de la bande passante, c'est à dire que  $2\omega_0 > \omega_{c2}$  où  $\omega_{c2}$  est la pulsation de coupure haute. On a donc :

$$\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} < 2\omega_0$$

ce qui s'écrit :

$$\sqrt{1 + 4Q^2} < 4Q - 1 \quad \text{d'où} \quad 1 + 4Q^2 < (4Q - 1)^2 = 16Q^2 - 8Q + 1$$

Cette inégalité se simplifie en :

$$Q > \frac{2}{3} \quad \text{soit} \quad R' < \frac{3L\omega_0}{2} = 950 \Omega$$

On en déduit qu'il faut choisir une résistance  $R$  vérifiant :

$$\boxed{R < 918 \approx 920 \Omega}$$

et même bien inférieure à cette valeur critique.

**B5)** On remarque que le choix de  $R$  est en adéquation avec la condition précédente. On calcule :

$$\boxed{Q = 12 ; \quad \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = 8,2 \cdot 10^{-2}}$$

De plus, en posant  $x = \omega/\omega_0$  on obtient :

- Pour  $x = 1,1$  :  $G/G_{\max} = 0,40$  ;
- Pour  $x = 1,5$  :  $G/G_{\max} = 9,8 \cdot 10^{-2}$  ;
- Pour  $x = 2$  :  $G/G_{\max} = 5,5 \cdot 10^{-2}$

Nous avons donc affaire à un filtre passe-bande très sélectif.

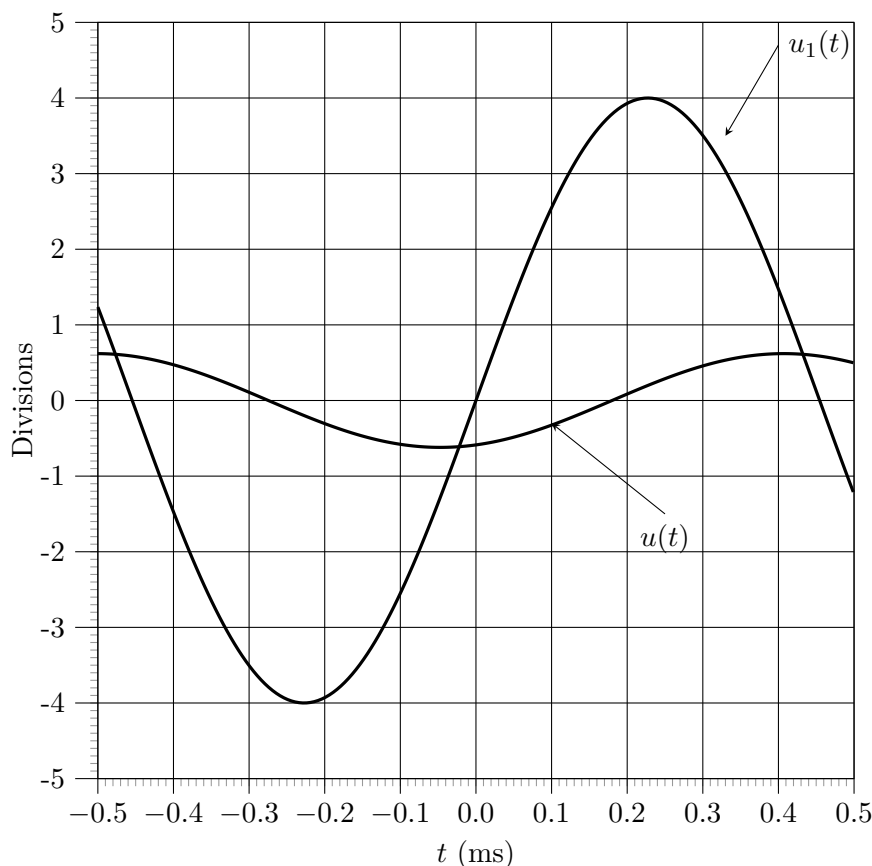
**B6)** On aura donc  $G = 0,15$  et  $\varphi = \arg \underline{H} = -\arctan [Q(1,1 - 1/1,1)] = -1,16$  rad.

Ce déphasage négatif correspond à un *retard temporel* :

$$\tau = \frac{|\varphi|}{2\pi f} = 0,18 \text{ ms}$$

La tension  $u(t)$  sera donc de la forme :

$$u(t) = 2 \times 0,15 \sin[2\pi f(t - \tau)] = 0,31 \sin[2\pi f(t - \tau)]$$



### C – Séparation des composantes de Fourier de $u_2(t)$

On utilise le filtre étudié dans la partie B avec  $L = 100 \text{ mH}$ ;  $R_L = 32 \Omega$ ;  $R = 20 \Omega$  et  $C$  ajustable. Ce filtre est alimenté avec la tension  $u_2(t)$  réglée sur la fréquence  $f = 1,0 \text{ kHz}$ .

- C1)** D'après le développement en série de Fourier de  $u_2(t)$ , seules les *multiples impaires* de  $f$  sont présentes dans le spectre. Les quatre premières harmoniques auront donc pour pulsations :

$$\omega_1 = \omega ; \omega_2 = 3\omega ; \omega_3 = 5\omega ; \omega_4 = 7\omega$$

Les amplitudes de ces quatre premières harmoniques sont :

$$E_1 = \frac{2U_2}{\pi} ; E_2 = \frac{2U_2}{3\pi} ; E_3 = \frac{2U_2}{5\pi} \text{ et } E_4 = \frac{2U_2}{7\pi}$$

- C2)** Si on suppose que le filtre passe-bande est bien sélectif, il faut réaliser la condition  $\omega_0 = \omega (= \omega_1)$  et espérer que les pulsations  $\omega_2, \omega_3$  et  $\omega_4$  seront situées bien en dehors de la bande passante. La tension  $u(t)$  sera alors presque égale à :

$$u(t) = G(\omega) \frac{2U_2}{\pi} \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

avec  $\varphi(\omega) = \arg \underline{H}(j\omega)$ . Comme  $\omega = \omega_0$  :  $G(\omega) = H_0$  et  $\varphi(\omega) = 0$ . On aura donc :

$$u(t) = H_0 \frac{2U_2}{\pi} \sin(\omega t) \quad \text{donc} \quad A_1 = H_0 \frac{2U_2}{\pi} = \frac{R}{R'} \frac{2U_2}{\pi}$$

A.N. :  $A_1 = 0,49 \text{ V}$

La valeur  $C_1$  de  $C$  à choisir sera donnée par :

$$\frac{1}{\sqrt{LC_1}} = \omega \quad \text{d'où} \quad C_1 = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{4\pi^2 L f^2} = 253 \text{ nF}$$

**C3)** Comme  $\omega_2 = 3\omega = 3\omega_0$ , on aura :

$$A_2 = G(\omega_2)E_2 = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2(3 - 1/3)^2}} \frac{2U_2}{3\pi}$$

et donc :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(3 - 1/3)^2}} \stackrel{\text{AN}}{=} 1,0 \cdot 10^{-2}$$

On peut donc dire que  $A_2$  est négligeable devant  $A_1$ . À fortiori il en sera de même des autres amplitudes  $A_3$  et  $A_4$  (et de toutes les suivantes) puisque ces amplitudes décroissent et que le gain  $G$  décroît lui aussi et tend vers 0 lorsque la pulsation augmente.

**C4)** Pour observer la manifestation de l'harmonique de pulsation  $(2p + 1)\omega$  il faut réaliser :

$$\omega_0 = (2p + 1)\omega \quad \text{d'où} \quad C = \frac{1}{(2p + 1)^2 L \omega^2} = \frac{C_1}{(2p + 1)^2}$$

On aura donc :

$$C_2 = \frac{C_1}{9} = 28 \text{ nF} ; C_3 = \frac{C_1}{25} = 10 \text{ nF} \quad \text{et} \quad C_4 = \frac{C_1}{49} = 5,2 \text{ nF}$$

Pour chacun de ces  $C_k$ , les amplitudes associées (notées  $B$ ) seront :

$$B_k = H_0 E_k$$

d'où :

$$B_2 = \frac{R}{R'} \frac{2U_2}{3\pi} = 0,16 \text{ V} ; B_3 = \frac{R}{R'} \frac{2U_2}{5\pi} = 98 \text{ mV} \quad \text{et} \quad B_4 = \frac{R}{R'} \frac{2U_2}{7\pi} = 70 \text{ mV}$$

## 2 ANALYSE D'UN CIRCUIT

1) On lit la période de  $e(t)$  et de  $u(t)$  :  $T = 1 \text{ ms}$ , ce qui entraîne :

$$f = 1 \text{ kHz}$$

De même, graphiquement :

$$E_m = 4 \times 2 = 8 \text{ V} \quad \text{et} \quad U_m = 3,6 \text{ V}$$

On en déduit l'amplitude de l'intensité :  $I_m = \frac{U_m}{R} = 40 \text{ mA}$

2) On mesure de même le décalage temporel  $\tau = 0,155 \text{ ms}$ ,  $u$  étant en retard par rapport à  $e(t)$ . On obtient donc :

$$\varphi = -2\pi f \tau = -0,97 \text{ rad}$$

3) Un théorème pont diviseur de tension conduit à :

$$\underline{u}(t) = \frac{R}{R+r+jL\omega} \underline{e}(t) \quad \text{d'où} \quad R+r+jL\omega = R \frac{\underline{e}(t)}{\underline{u}(t)} = R \frac{E_m}{U_m} e^{-j\varphi}$$

En considérant l'égalité des parties réelle et imaginaire on obtient :

$$\boxed{R+r = R \frac{E_m}{U_m} \cos \varphi \quad \text{et} \quad L\omega = -R \frac{E_m}{U_m} \sin \varphi}$$

A.N. :

$$\boxed{r = 22 \Omega \quad \text{et} \quad L = 26 \text{ mH}}$$

ce qui est cohérent avec les ordres de grandeurs des composants utilisés en TP.

4) Non car il y a un problème de masses : il faut que la masse du générateur coïncide avec la masse de l'oscilloscope.

### 3 TOBOGGAN AQUATIQUE (d'après EPITA - 2023)

#### I.1 Étude d'un toboggan rectiligne

1 -  $E_m$  conservée donc  $mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$ , d'où  $v_B = \sqrt{2gh}$ .

2 - Ce résultat ne dépend pas de la forme du toboggan.

(sauf si le toboggan remonte au-dessus du point de départ !)

3 - PFD :  $m\ddot{x}\vec{e}_x = N\vec{e}_z - T\vec{e}_x + m\vec{g}$ .

Projeté sur  $\vec{e}_z$  :  $0 = N - mg \cos \alpha$ , d'où  $N = mg \cos \alpha$ .

4 - ★ On a  $T = \mu N = \mu mg \cos \alpha$ , donc  $T$  et  $N$  sont des constantes.

$$W_{AB}(\vec{R}) = \overrightarrow{AB} \cdot (-T\vec{e}_x + N\vec{e}_z) = -AB \times T.$$

★ Enfin,  $AB = \frac{h}{\sin \alpha}$ , donc  $W_{AB}(\vec{R}) = -\frac{h \mu mg \cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{\mu mgh}{\tan \alpha}$ .

5 - TEM entre A et B :  $\Delta E_m = W_{AB}(\vec{R})$ , soit donc  $\frac{1}{2}mv_B^2 - mgh = -\frac{\mu mgh}{\tan \alpha}$ .

$$\text{D'où } v_B = \sqrt{2gh \left(1 - \frac{\mu}{\tan \alpha}\right)}.$$

6 - On lit que  $\mu \simeq 0,2$ .

7 -  $\Delta E_c = \text{travail frottement} = \mu \times mg \times L$ , donc  $L = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{\mu mg}$ ,

$$\text{soit donc } L = \frac{v_0^2}{2\mu g} \simeq 125 \text{ m.}$$

## I.2 Étude d'un virage

### I.2.1 Préliminaire : étude des oscillations dans une cuvette

8 -  $\vec{v} = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta$  et donc  $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = a\vec{e}_r \wedge ma\dot{\theta}\vec{e}_\theta = ma^2\dot{\theta}\vec{e}_z$ , d'où  $\sigma_{Oz} = ma^2\dot{\theta}$ .

9 -  $\Gamma_{Oz}(\vec{P}) = -mga \sin \theta$  avec la méthode de son choix.

$$\Gamma_{Oz}(\vec{R}) = 0.$$

10 - TMC axe  $Oz$  :  $\frac{d\sigma_{Oz}}{dt} = \Gamma_{Oz}(\vec{P}) + \Gamma_{Oz}(\vec{R})$ .

D'où  $ma^2\ddot{\theta} = -mga \sin \theta$ , soit  $\ddot{\theta} + \frac{g}{a} \sin \theta = 0$ .

11 - Approximation  $\theta_0 \ll 1 \text{ rad.}$

Solutions générale :  $\theta(t) = A \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t + B \sin \sqrt{\frac{g}{a}}t + 0$ .

Avec  $\theta(0) = \theta_0$  on a  $A = \theta_0$ , avec l'autre on a  $B = 0$ .

D'où  $\theta(t) = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t$ .

12 - Allure d'un cosinus (et pas d'un sinus), max et min en  $\pm\theta_0$ .

13 - Période  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ .

### I.2.2 Retour au cas du virage dans le toboggan

14 -  $\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = \underbrace{mg\vec{e}_x + \frac{mv_0^2}{R_0}\vec{e}_y}_{=m\vec{g}_{\text{eff}}} + \vec{N}$ . On a donc  $\|\vec{g}_{\text{eff}}\| = \sqrt{g^2 + \frac{v_0^4}{R_0^2}}$ .

15 -  $\tan \alpha = \frac{\text{composante sur } y}{\text{composante sur } x}$ , d'où  $\alpha = \arctan \frac{v_0^2}{R_0g}$ .

**Remarque :** acceptable aussi avec  $\alpha = \arcsin \frac{v_0^2}{\sqrt{(R_0g)^2 + v_0^4}}$  ou  $\alpha = \arccos \frac{R_0g}{\sqrt{(R_0g)^2 + v_0^4}}$ .

16 - Il s'agit de la même situation qu'en I.2.1, sauf que la pesanteur est inclinée. On peut faire tourner la figure pour ramener cette pesanteur verticale. Le mouvement se déroule alors entre des angles  $-\alpha$  et  $+\alpha$  de part et d'autre du vecteur  $\vec{g}_{\text{eff}}$ .

$\Rightarrow \theta$  varie entre 0 et  $2\alpha$ . Donc ici entre 0 et  $102^\circ$ .

La gouttière doit donc monter au moins jusqu'à  $102^\circ$ .