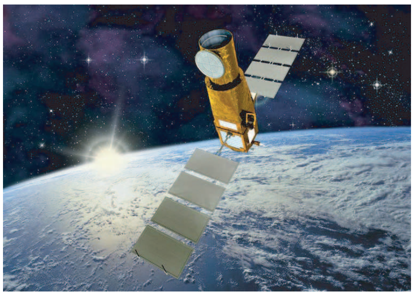
DM n°4 - Mécanique

À rendre pour le jeudi 5 octobre

1 Mise en orbite d'un satellite

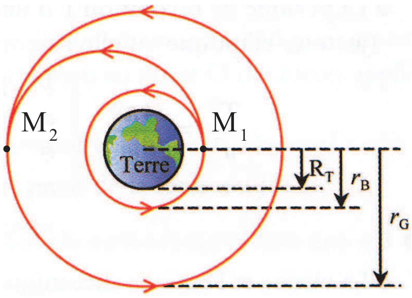


On souhaite placer un satellite en orbite géostationnaire autour de la Terre. Les mouvements sont étudiés dans le référentiel géocentrique dans lequel la Terre est animée d'un mouvement de rotation de période T.

1. Calculer l'énergie mécanique E_{mB} d'un satellite de masse m en orbite circulaire basse à une distance r_{B} du centre de la Terre. L'origine de l'énergie potentielle de pesanteur est choisie nulle à l'infini.
2. Exprimer l'énergie du satellite E_{S} avant son lancement, lorsqu'il est posé à la surface de la Terre à la latitude λ. Où est-il préférable de procéder au lancement ?
3. L'orbite géostationnaire est celle pour laquelle le satellite reste à la verticale d'un même point de la Terre.
   (a) Peut-on placer un tel satellite au dessus d'un point quelconque de la Terre ?
   (b) Déterminer le rayon r_{G} de l'orbite géostationnaire.
   (c) Calculer l'énergie mécanique E_{mG} d'un satellite géostationnaire.
4. Une fois le satellite placé sur une orbite basse, on veut le transférer vers l'orbite géostationnaire.

   Pour cela, on lui communique une impulsion au point M_1, afin qu'il décrive une ellipse dont l'apogée se trouve en M_2 sur l'orbite géostationnaire (ellipse de Hohmann).

   Une seconde impulsion permet alors de le stabiliser sur cette orbite.



   (a) Déterminer l'énergie mécanique E_{mT} du satellite sur l'ellipse de transfert. En déduire l'énergie qu'il faut fournir en M_1 puis en M_2 pour réaliser le transfert.
   (b) Déterminer la durée du transfert.

   Données : $M_{\mathrm{T}} = 5,98.10^{24}$ kg ; $R_{\mathrm{T}} = 6,38.10^{6}$ m ; $m = 10^{3}$ kg ; $T = 86164$ s ; $r_{\mathrm{B}} = 7.10^{6}$ m ; $G = 6,67.10^{-11}$ kg^{-1}.m^{3}s^{-2}.

Réponses : 3b. $r_{\mathrm{G}} = \left(\frac{T^2 G M_{\mathrm{T}}}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 42,2.10^{6}$ m, 3c. $E_{\mathrm{mG}} = -\frac{G M_{\mathrm{T}} m}{2 r_{\mathrm{G}}} = -4,73.10^{9}$ J, 4a. $E_{\mathrm{mT}} = -\frac{G M_{\mathrm{T}} m}{r_{\mathrm{B}}+r_{\mathrm{G}}} = -8,11.10^{9}$ J, 4b. $\Delta t = \pi\sqrt{\frac{(r_{\mathrm{B}}+r_{\mathrm{G}})^3}{8 G M_{\mathrm{T}}}} = 5,33$ h.

2 Pendule simple dans un train en accélération

On considère un pendule simple, constitué d'un objet de masse m (considéré comme un point matériel M) attaché à un fil de longueur $\ell = 1\,\text{m}$ dont l'autre extrémité est attachée au plafond d'un wagon. La position du centre de masse du wagon, repérée sur un axe X horizontal, obéit à la loi horaire :
$x = at^2 + bt + c$ avec $a = 3,0\,\text{m.s}^{-2}$, $b = 8,0\,\text{m.s}^{-1}$ et $c = 4,0\,\text{m}$.

1. Quelle est l'inclinaison du fil à l'équilibre pour un voyageur placé dans le wagon ?
2. Le pendule étant en équilibre, un voyageur donne une petite impulsion à M, de sorte qu'il ne soit plus en équilibre. Déterminer l'équation différentielle gérant l'évolution de la position de M. Linéariser cette équation en considérant des mouvements de petite amplitude autour de la position d'équilibre précédente. Quelle sera la période d'oscillation du pendule ?

3 Wagon sous la pluie

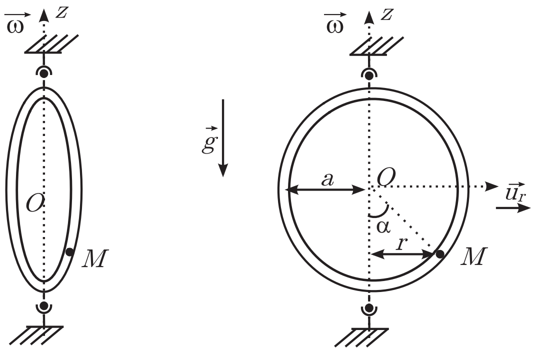
Un wagon ouvert, de masse m_0, est initialement au repos. A l'instant $t = 0$, il se met à pleuvoir verticalement avec un débit massique D_{m_e} constant. A partir de ce même instant, le wagon est tracté par une force constante de module F.

Déterminer la vitesse $v(t)$ du wagon, sachant qu'il se déplace sans frottement sur une voie horizontale, et que le wagon est plein lorsqu'il a doublé sa masse.

4 Équilibre d'une bille dans un cerceau creux tournant autour d'un axe vertical

Une bille assimilée à un point matériel M de masse m peut glisser sans frottement dans un cerceau creux de rayon a qui tourne autour de son axe vertical à la vitesse angulaire constante ω par rapport au laboratoire supposé galiléen.

Le shéma du dispositif est présenté dans la figure ci-contre.



1. Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur la bille dans le référentiel R' du cerceau. Déterminer la ou les positions d'équilibre de la bille.
2. Etablir l'expression de l'énergie potentielle de la bille en fonction de l'angle α. Retrouver les positions d'équilibre de la bille et étudier leur stabilité. Tracer l'allure de $E_p\left(\alpha\right)$ dans les différents cas étudiés.
3. On s'intéresse à de petites oscillations de l'anneau. Ecrire l'énergie $E_p(\alpha)$ sous la forme d'un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de la position d'équilibre stable centrale. Ecrire la conservation de l'énergie mécanique pour ces oscillations puis en déduire l'équation angulaire du mouvement et la pulsation des oscillations.

Réponses : 2. $E_p\left(\alpha\right) = -mga\cos\left(\alpha\right) - \dfrac{m\omega^2 a^2 \sin^2\left(\alpha\right)}{2}$. 3. $\ddot{\alpha} + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\alpha = 0$.