

## Correction - DM n°4 - Mécanique

### 1 Mise en orbite d'un satellite

1.  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{r_B}$ , or  $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r_B}}$  car le mouvement est circulaire, donc :  $E_{mB} = -\frac{GM_T m}{2r_B} = -2,85 \cdot 10^{10}$  J. L'énergie est bien négative pour un mouvement circulaire.
2. La distance  $d$  qui sépare le satellite de l'axe de rotation de la Terre vaut  $d = R_T \cos \lambda$ , et la vitesse du satellite à la surface de la Terre vaut donc

$$v = \omega d = \frac{2\pi R_T \cos \lambda}{T} = \frac{2\pi * 6 * 10^6 * 1}{86164} \simeq 400 \text{ m.s}^{-1}$$

On a pris le cas de l'équateur. On obtient finalement :  $E_S = -\frac{GM_T m}{R_T} + \frac{1}{2}m \left( \frac{2\pi R_T \cos \lambda}{T} \right)^2$ . Cette énergie est maximale lorsque  $\cos \lambda = 1$ , donc au niveau de l'équateur. Cela explique pourquoi les centres de lancement sont proches de l'équateur (Kourou en Guyane pour la France, Cap Canaveral en Floride pour les Etats-Unis).

3. (a) Tous les satellites tournent autour du centre  $G$  de la Terre. Pour rester à la verticale d'un point qui ne se trouve pas à l'équateur, un satellite devrait effectuer son orbite autour du point  $H$  appartenant à l'axe de rotation de la Terre, mais différent de  $G$ . Les satellites géostationnaires sont donc nécessairement placés dans le plan équatorial.
- (b) En écrivant l'égalité des vitesses angulaires de la Terre et du satellite géostationnaire, on obtient :  $r_G = \left( \frac{T^2 GM_T}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 42,2 \cdot 10^6$  m. Cela correspond ainsi à une altitude par rapport au centre de la Terre de 35 800 km.
- (c)  $E_{mG} = -\frac{GM_T m}{2r_G} = -4,73 \cdot 10^9$  J. On vérifie bien qu'on trouve à nouveau une énergie négative pour un mouvement circulaire. L'énergie est plus proche de 0 car le satellite est plus loin de l'astre attracteur.
4. (a) Le demi-grand axe de l'ellipse vérifie  $2a = r_B + r_G$ , or l'énergie mécanique d'un mouvement elliptique est donnée par  $E_m = -\frac{GM_T m}{2a}$ , donc  $E_{mT} = -\frac{GM_T m}{r_B + r_G} = -8,11 \cdot 10^9$  J ; Il faut ainsi fournir de l'énergie au satellite au périégée, puis à l'apogée de l'ellipse de transfert. Ce sont les seuls instants où les moteurs doivent être allumés.  
 $\Delta E_{m1} = E_{mT} - E_{mB} = 2,04 \cdot 10^{10}$  J ;  $\Delta E_{m2} = E_{mG} - E_{mT} = 3,38 \cdot 10^9$  J.
- (b) En utilisant la troisième loi de Kepler, on obtient :  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ , or la durée du transfert correspond à la moitié de la période elliptique, donc  $\Delta t = \pi \sqrt{\frac{(r_B + r_G)^3}{8GM_T}} = 5,33$  h.

## 2 Pendule simple dans un train en accélération

- Effectuons une étude dynamique dans le référentiel lié au train, non galiléen (car en mouvement accéléré par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen).

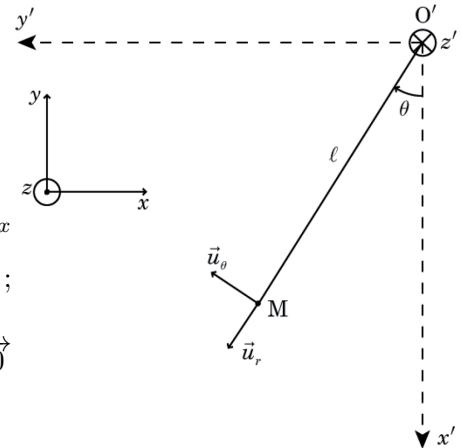
Référentiel :  $\mathcal{R}'$  lié au train, en translation rectiligne par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen :  $\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{0}$ .

Système : point matériel  $M$ .

Bilan des forces :

- poids :  $\vec{P} = mg\vec{u}_{x'}$  ;
- tension du fil :  $\vec{T} = -T_r\vec{u}_r$  ;
- force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{i,e} = -m\vec{a}_e$   
avec  $\vec{a}_e = \left( \frac{d^2\vec{OO}'}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{u}_x = 2a\vec{u}_x$   
d'où  $\vec{f}_{i,e} = -2ma\vec{u}_x$  ;
- force d'inertie de Coriolis :  $\vec{f}_{i,c} = -m\vec{a}_c$   
avec  $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}') = \vec{0}$

d'où  $\vec{f}_{i,c} = \vec{0}$ .



Le principe fondamental de la dynamique appliqué à  $M$  dans  $\mathcal{R}'$  non galiléen s'écrit :

$$m\vec{a}(M/\mathcal{R}') = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{i,e}$$

Or si  $M$  est à l'équilibre dans  $\mathcal{R}'$ , on a  $\vec{a}(M/\mathcal{R}') = \vec{0}$ .

En projetant la relation précédente selon  $\vec{u}_\theta$  (car  $\vec{T} \cdot \vec{u}_\theta = 0$  et  $\vec{T}$  est inconnu), on en déduit :

$$0 = -mg \sin(\theta_e) + 2ma \cos(\theta_e) \Rightarrow \tan(\theta_e) = \frac{2a}{g}.$$

Comme  $-\frac{\pi}{2} < \theta_e < \frac{\pi}{2}$ , on obtient  $\theta_e = \arctan\left(\frac{2a}{g}\right) = 32^\circ$ .

- On a  $\vec{r}' = l\vec{u}_r$  et  $\theta \neq C^{te}$  :  $\vec{v}(M/\mathcal{R}') = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a}(M/\mathcal{R}') = -l\dot{\theta}^2\vec{u}_r + l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$ .

En projetant le principe fondamental de la dynamique selon  $\vec{u}_\theta$ , on obtient maintenant :

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) + 2ma \cos(\theta)$$

soit :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) - \frac{2a}{l} \cos(\theta) = 0$$

On étudie de petits mouvements autour de la position d'équilibre ; on pose donc  $\theta = \theta_e + \varepsilon$  avec  $\varepsilon \ll 1$ . On en déduit  $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$ .

De plus, on va pouvoir linéariser l'équation différentielle précédente, en utilisant :

$$\begin{cases} \sin(\theta) = \sin(\theta_e + \varepsilon) = \cos(\theta_e) \sin(\varepsilon) + \sin(\theta_e) \cos(\varepsilon) \approx \varepsilon \cos(\theta_e) + \sin(\theta_e) \\ \cos(\theta) = \cos(\theta_e + \varepsilon) = \cos(\theta_e) \cos(\varepsilon) - \sin(\theta_e) \sin(\varepsilon) \approx \cos(\theta_e) - \varepsilon \sin(\theta_e) \end{cases}$$

On obtient donc :  $\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{l}(\sin(\theta_e) + \varepsilon \cos(\theta_e)) - \frac{2a}{l}(\cos(\theta_e) - \varepsilon \sin(\theta_e)) = 0$ .

Pour faire apparaître  $\tan \theta_e$ , dont on connaît l'expression, on factorise une partie de l'équation par  $\cos(\theta_e)$  :  $\ddot{\varepsilon} + \cos(\theta_e) \times \left( \frac{g}{l}(\tan(\theta_e) + \varepsilon) - \frac{2a}{l}(1 - \varepsilon \tan(\theta_e)) \right) = 0$ .

Or  $\tan(\theta_e) = \frac{2a}{g}$  donc  $\ddot{\varepsilon} + \cos(\theta_e) \times \left( \frac{g}{l} \left( \frac{2a}{g} + \varepsilon \right) - \frac{2a}{l} \left( 1 - \varepsilon \frac{2a}{g} \right) \right) = 0$ , soit :

$$\ddot{\varepsilon} + \cos(\theta_e) \times \left( \frac{g^2 + 4a^2}{gl} \right) \varepsilon = 0.$$

Pour déterminer  $\cos(\theta_e)$ , on utilise :

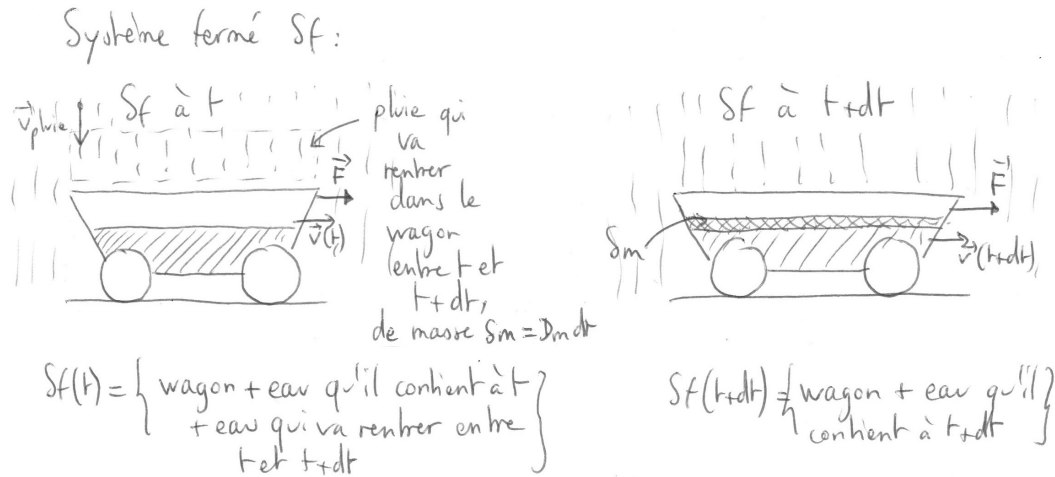
$$\frac{1}{\cos^2(\theta_e)} = 1 + \tan^2(\theta_e) = 1 + \left( \frac{2a}{g} \right)^2 = \frac{g^2 + 4a^2}{g^2} \Rightarrow \cos(\theta_e) = \frac{g}{\sqrt{g^2 + 4a^2}}.$$

On en déduit finalement :  $\ddot{\varepsilon} + \frac{\sqrt{g^2 + 4a^2}}{l} \varepsilon = 0$  d'où la pulsation propre  $\omega_0 = \frac{(g^2 + 4a^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{l}}$  puis la période du mouvement :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi\sqrt{l}}{(g^2 + 4a^2)^{\frac{1}{4}}} = 1,85 \text{ s.}$$

### 3 Wagon sous la pluie

Effectuons un bilan de quantité de mouvement dans le référentiel terrestre (du sol) galiléen pour le système fermé constitué du wagon, de l'eau qu'il contient à l'instant  $t$  (masse  $m_{eau}(t) = D_{me}t$ ) et de l'eau qu'il va recevoir entre  $t$  et  $t+dt$  de masse  $\delta m_{eau} = D_{me}dt$ . On se limite pour l'instant à la première phase du mouvement pendant laquelle le wagon n'est pas encore plein.



Sa quantité de mouvement est <sup>1</sup> :

— A l'instant  $t$  :

$$\vec{p}(t) = [m_0 + m_{eau}(t)] v(t) \vec{u}_x + D_{me}dt \vec{v}_{pluie/sol}$$

— A l'instant  $t + dt$  :

$$\vec{p}(t + dt) = [m_0 + m_{eau}(t + dt)] v(t + dt) \vec{u}_x = [m_0 + m_{eau}(t) + D_{me}dt] v(t + dt) \vec{u}_x$$

Le wagon est soumis à son poids, à la réaction des rails et à la force de traction  $F$  (la résultante des forces de pression est nulle car le champ de pression est uniforme autour du système considéré). Seule la force  $F$  est horizontale, et le théorème de la résultante cinétique appliqué au système fermé précédent dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur la direction  $\vec{u}_x$  <sup>2</sup> conduit à :

$$\frac{dp_x}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{p_x(t + dt) - p_x(t)}{dt} = [m_0 + m_{eau}(t)] \frac{dv}{dt} + D_{me}v = F$$

On obtient donc une équation différentielle à deux variables  $v$  et  $t$  :

$$\boxed{[m_0 + m_{eau}(t)] \frac{dv}{dt} + D_{me}v = F}$$

On peut la résoudre en séparant les variables :

$$\frac{dv}{F - D_{me}v} = \frac{dt}{m_0 + D_{me}t}$$

En intégrant, on obtient :

$$\frac{\ln(m_0 + D_{me}t)}{D_{me}} = -\frac{\ln(F - D_{me}v)}{D_{me}} + C$$

1. On notera qu'il est inutile d'utiliser une loi de composition du mouvement comme dans l'exercice sur la fusée car la vitesse de la pluie correspond déjà à celle par rapport au référentiel d'étude.

2. On notera que la contribution de la pluie n'intervient que suivant la direction verticale, et est compensée par la réaction verticale du support.

Sachant qu'à  $t = 0, v = 0$ , on en déduit :

$$\frac{\ln(m_0)}{D_{me}} = -\frac{\ln(F)}{D_{me}} + C$$

Donc  $\frac{m_0 + D_{me}t}{m_0} = \frac{F}{F - D_{me}v}$  Finalement, tant que le wagon n'est pas plein, c'est à dire tant que  $t < \frac{m_0}{D_{me}}$ , on obtient :

$$v \left( t < \frac{m_0}{D_{me}} \right) = \frac{F}{D_{me}} \left( 1 - \frac{m_0}{m_0 + D_{me}t} \right) = \frac{Ft}{m_0 + D_{me}t}$$

On voit que la vitesse augmente au cours du temps pour tendre vers la valeur  $v_\infty = \frac{F}{D_{me}}$ . Cependant, cette valeur n'est jamais atteinte car le wagon est plein avant de l'atteindre.

A  $t_0 = \frac{m_0}{D_{me}}$ , la vitesse atteinte vaut  $v \left( t = \frac{m_0}{D_{me}} \right) = \frac{F}{2D_{me}}$ . On se ramène ainsi au cas simple d'un solide

de masse  $2m_0$ , soumis à la résultante  $F$ , avec une vitesse initiale égale à  $\frac{F}{2D_{me}}$ , donc pour  $t > t_0 = \frac{m_0}{D_{me}}$ , on obtient :

$$v \left( t > \frac{m_0}{D_{me}} \right) = \frac{F}{2D_{me}} + \frac{F(t - t_0)}{2m_0} = \frac{Ft}{2m_0}$$

## 4 Équilibre d'une bille dans un cerceau creux tournant autour d'un axe vertical

- Dans le référentiel  $R'$  attaché au cerceau, non galiléen car en rotation par rapport au référentiel du laboratoire  $R$  supposé galiléen, les forces ou pseudo-forces s'exerçant sur la bille sont :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_{centrifuge}} &= -m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = m\omega^2 r \vec{u}_r, \quad r = a \sin(\alpha) \\ \overrightarrow{F_{Coriolis}} &= -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M/R') = \vec{0} \text{ à l'équilibre} \\ \overrightarrow{R_{support}} \hat{=} \vec{T} &= T \cos \alpha \vec{u}_z - T \sin(\alpha) \vec{u}_r + R_\varphi \vec{u}_\varphi, \text{ avec } R_\varphi = 0 \text{ à l'équilibre} \\ \overrightarrow{P} &= m\vec{g} = -mg \vec{u}_z \end{cases}$$

Le PFD appliqué au système constitué de la bille, dans le référentiel  $R'$ , donne en projection dans le repère  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  :

$$\begin{cases} m\omega^2 a \sin(\alpha) - T \sin(\alpha) &= 0 \\ -mg + T \cos(\alpha) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left( \omega^2 a - \frac{g}{\cos(\alpha)} \right) \sin(\alpha) &= 0 \\ T &= \frac{mg}{\cos(\alpha)} \end{cases}$$

D'où les positions d'équilibre de la bille :

$$\begin{cases} \alpha_{1,2} &= 0 \text{ ou } \pi \text{ (toujours)} \\ \alpha_{3,4} &= \pm \arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right) \quad \left( \text{si } \frac{g}{a\omega^2} \leq 1 \Leftrightarrow \omega \hat{=} \omega_0 \geq \sqrt{\frac{g}{a}} \right) \end{cases}$$

- L'énergie potentielle de la bille s'écrit :  $E_p = E_p(\vec{P}) + E_p(\overrightarrow{F_{centrifuge}})$ , avec :

$$\begin{cases} E_p(\vec{P}) &= mgh = -mga \cos(\alpha) \quad (= 0 \text{ si } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ par convention}) \\ E_p(\overrightarrow{F_{centrifuge}}) &= -\int \overrightarrow{F_{centrifuge}} \cdot d\vec{l} = -\int_0^M m\omega^2 r dr = -\frac{m\omega^2 r^2}{2} = -\frac{m\omega^2 a^2 \sin^2(\alpha)}{2} \end{cases}$$

$$\text{d'où } E_p(\alpha) = -mga \cos(\alpha) - \frac{m\omega^2 a^2 \sin^2(\alpha)}{2}$$

Les positions d'équilibre sont telles que  $\frac{dE_p}{d\alpha} = 0$ , soit :

$$mga \sin(\alpha) - m\omega^2 a^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 0$$

$$(g - \omega^2 a \cos(\alpha)) \sin(\alpha) = 0$$

On retrouve les mêmes positions d'équilibre que précédemment. Etudions maintenant leur stabilité :  $\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2} = mga \cos(\alpha) - m\omega^2 a^2 (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))$  d'où :

- en  $\alpha = \alpha_1 = 0$  ie (en haut) :  $\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2} = ma(g - \omega^2 a) \begin{cases} > 0 \text{ si } \omega < \omega_0 & : \text{équilibre stable} \\ < 0 \text{ si } \omega > \omega_0 & : \text{équilibre instable} \end{cases}$
- en  $\alpha = \alpha_2 = \pi$  ie (en bas) :  $\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2} = ma(-g - \omega^2 a) < 0$  toujours : équilibre instable.

On peut encore écrire :  $\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2} = mga \cos(\alpha) - m\omega^2 a^2 (1 - 2\cos^2(\alpha))$  d'où, si  $\omega \geq \omega_0$  :

- en  $\alpha = \alpha_{3,4}$  :  $\left(\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2}\right)_{\alpha_{3,4}} = m(\omega^2 a^2 - \frac{g^2}{\omega}) \geq 0$  : équilibre stable.

L'allure de  $E_p$  dans les différents cas étudiés est tracée sur les figures a), b) et c).

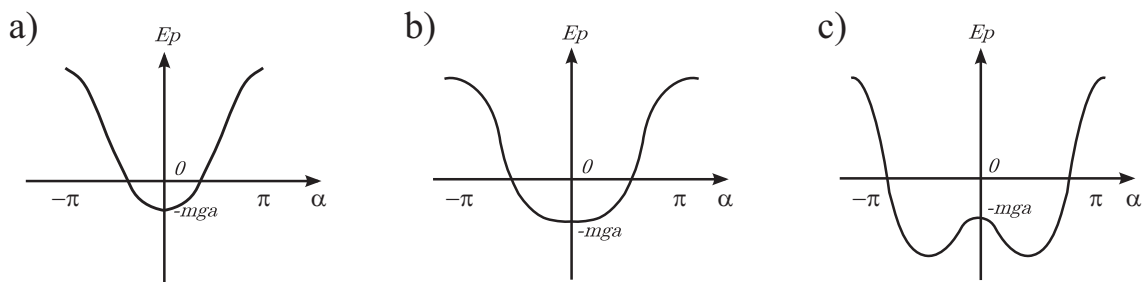


FIGURE 1 - a) cas où  $\omega < \omega_0$ . b) cas où  $\omega = \omega_0$ . c) cas où  $\omega > \omega_0$ .

3. Au voisinage de  $\alpha = 0$ , un développement limité à l'ordre 2 (voir cours sur l'approximation harmonique) donne :  $E_{p,OH}(\alpha) = -mga + \frac{(\alpha-0)^2}{2} (mga - m\omega^2 a^2)$ .

Or la vitesse de la bille est  $v = a\dot{\alpha}$  donc son énergie cinétique est  $E_c = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\alpha}^2$ .

Donc son énergie mécanique s'écrit :  $E_{méca} = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\alpha}^2 - m a^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m a^2 \alpha^2 (\omega_0^2 - \omega^2) = C^{te}$  car seule des forces conservatives interviennent ici. En dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient :

$$\ddot{\alpha} + (\omega_0^2 - \omega^2) \alpha = 0$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$ , définie si  $\omega < \omega_0$  ce qui est le cas au voisinage de  $\alpha = 0$ . On remarque que la période associée  $\Gamma$  augmente si  $\omega$  augmente (donc si la période de rotation du cerceau diminue), et que  $\Gamma \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_0} \infty$ .