

Interrogation de cours n°4

20

Changements de référentiels

1. Un pendule simple de longueur l , de masse m est placé dans un train ayant une accélération constante $\vec{a}_{train/sol} = a_0 \vec{u}_x$, avec $a_0 > 0$ (attention, ce n'est pas exactement le cas du cours).
 Déterminer l'angle θ_{eq} que fait le pendule avec la verticale, à l'équilibre dans le référentiel du train.
 On appliquera (en énonçant clairement les théorèmes avant de faire les calculs) :
 - (a) le théorème du moment cinétique;
 - (b) le théorème de l'énergie mécanique.

a) TMC par rapport à O fixe dans R_{train} non galiléen:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_{ext}) + \vec{M}_O(\vec{f}_{ic}) + \vec{M}_O(\vec{f}_{c})$$

$\frac{d}{dt} \vec{L}_O \neq 0$ dans R_{train} *
 $\vec{M}_O(\vec{F}_{ext}) = \vec{0}$ car pas de rotation du train *
 $\vec{M}_O(\vec{f}_{ic}) = \vec{0}$
 $\vec{M}_O(\vec{f}_{c}) = m a_0 l \cos \theta \vec{u}_z$

or $\begin{cases} \vec{M}_O(\vec{P}) = -mgl \sin \theta \vec{u}_z \\ \vec{M}_O(\vec{T}) = \vec{0} \\ \vec{M}_O(\vec{f}_{c}) = m a_0 l \cos \theta \vec{u}_z \end{cases}$

$\Rightarrow 0 = -mgl \sin \theta + m a_0 l \cos \theta$
 $\Rightarrow \tan \theta_{eq} = \frac{a_0}{g}$ *

Schéma:
 → trièdre *
 → forces *
 → θ_{eq} dans le bon sens *

b) TPM à M dans R_{train} non galiléen

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{ext, int}) + \mathcal{P}(\vec{f}_{c})$$

$\mathcal{P}(\vec{F}_{ext, int}) = 0$ toujours nulle *
 $\mathcal{P}(\vec{f}_{c}) = m a_0 \vec{u}_x \cdot d\vec{x} \vec{u}_x = -dE_p \Rightarrow dE_p = m a_0 dx$
 $E_p = m a_0 x + \text{cte}$ *
 choisie nulle en $x=0$

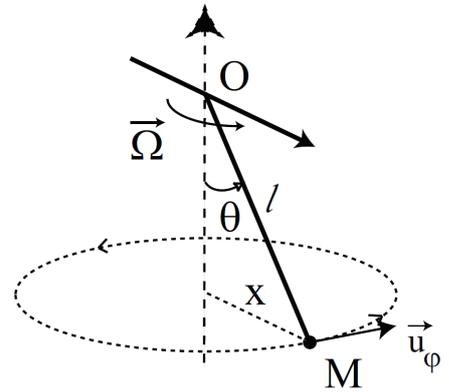
d'où $E_m = \frac{1}{2} m v^2 + mgz' + m a_0 x$
 $(\dot{\theta})^2$ axe vertical orienté vers le haut $\Rightarrow z' = -l \cos \theta$ *
 avec origine en O

donc
$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta - m a_0 l \sin \theta \right]$$

$$= m l^2 \ddot{\theta} \dot{\theta} + mgl \dot{\theta} \sin \theta - m a_0 l \dot{\theta} \cos \theta = 0 \text{ car } E_m = \text{cte.}$$

et à l'équilibre dans R_{train}: $\ddot{\theta} = 0$ * donc $mgl \sin \theta = m a_0 l \cos \theta$
 $\Rightarrow \tan \theta = \frac{a_0}{g}$ *

2. Une tige horizontale est mise en rotation uniforme autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \vec{u}_z$ constante. Un pendule simple (point M de masse m relié à un fil sans masse de longueur l) est relié à la tige en O.



- (a) Quel angle fait le pendule avec la verticale lorsque le pendule est au repos dans le référentiel de la tige en rotation en fonction de la vitesse de rotation Ω ?
- (b) Étudier la stabilité de la position d'équilibre - celle de valeur la plus faible seulement - en fonction de la vitesse de rotation Ω_0 par la méthode de votre choix.

* On applique le PFD au point M dans le référentiel tournant non galiléen:

* $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$

(// \vec{u}_r : $-m l \ddot{\theta} = mg \cos \theta - T + m \Omega^2 l \sin \theta$) inutile ici

* // \vec{u}_θ : $m l \ddot{\theta} = -mg \sin \theta + m \Omega^2 l \cos \theta$

(// \vec{u}_φ : $m \times \ddot{\varphi} = -2m \Omega l \dot{\theta} \cos \theta$) inutile ici

schéma complété

inutile ici

$\vec{F}_{ic} = -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$
 $= -2m \Omega \vec{u}_z \wedge l \dot{\theta} \vec{u}_\theta$
 $\vec{u}_x = -2m \Omega l \dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_\varphi$

* A l'équilibre dans le référentiel tournant, $\theta = \text{cte}$ et $\dot{\varphi} = \Omega = \text{constante}$.

// \vec{u}_θ : $0 = -mg \sin \theta + m \Omega^2 l \sin \theta \cos \theta$
 $\Rightarrow 0 = m \sin \theta [-\Omega^2 l \cos \theta - g]$

6 $\Rightarrow \begin{cases} \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta_{eq1} = 0 \text{ ou } \pi \\ \cos \theta = \frac{g}{\Omega^2 l} \Rightarrow \theta_{eq2} = \arccos\left(\frac{g}{\Omega^2 l}\right) \text{ si } \Omega > \sqrt{\frac{g}{l}} \end{cases}$

Etude de la stabilité autour de $\theta_{eq1} = 0$, on linéarise :

// \vec{u}_θ $\Rightarrow m l \ddot{\theta} = [-mg + m \Omega^2 l] \theta$
 $\Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{g - \Omega^2 l}{l}\right) \theta = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{stable si } \Omega^2 < \frac{g}{l} \\ \text{instable si } \Omega^2 > \frac{g}{l} \end{cases}$ cohérent avec décollage si rotation rapide.

BONUS +0.5

Autre méthode avec l'énergie potentielle:

$$E_p = -\frac{1}{2} m \Omega^2 l^2 \sin^2 \theta - mgl \cos \theta \quad \text{④}_2$$

$$\Rightarrow \frac{dE_p}{d\theta} = -m \Omega^2 l^2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{\frac{1}{2} \sin 2\theta} + mgl \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = \theta_{eq1} \text{ ou } \theta_{eq2}$$

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = -m \Omega^2 l^2 \cos 2\theta + mgl \cos \theta = ml [g - \Omega^2 l] > 0 \text{ si}$$

en $\theta = 0$
 θ_{eq1} ④₂

$\Omega^2 < \frac{g}{l}$ stable

On retrouve les mêmes résultats.

avec décollage si rotation rapide
BONUS +0.5

< 0 si ④₂
 $\Omega^2 > \frac{g}{l}$ instable

1 Lois du frottement solide

- Énoncer les lois de Coulomb du frottement solide (on précisera à chaque fois les conditions pour lesquelles le régime de glissement ou non-glissement s'arrête).

* S'il n'y a pas glissement :

$$\begin{aligned} \textcircled{*} &\rightarrow \vec{v}_g = \vec{0} \\ \textcircled{*} &\rightarrow \|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\| \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \textcircled{*} &\rightarrow \vec{v}_g = \vec{0} \\ \textcircled{*} &\rightarrow \|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\| \end{aligned}} \right\} \text{fin du non glissement lorsque } \|\vec{T}\| = f_s \|\vec{N}\| \textcircled{*}$$

4,5 * S'il y a glissement :

$$\begin{aligned} \textcircled{*} &\rightarrow \vec{v}_g \neq \vec{0} \\ \textcircled{*} &\rightarrow \|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\| \\ \textcircled{*} &\rightarrow \vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \textcircled{*} &\rightarrow \vec{v}_g \neq \vec{0} \\ \textcircled{*} &\rightarrow \|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\| \\ \textcircled{*} &\rightarrow \vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0 \end{aligned}} \right\} \text{fin du glissement lorsque } \begin{cases} \vec{v}_g = \vec{0} \textcircled{*} \\ \text{et} \textcircled{*} \\ \|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\| \textcircled{*} \end{cases}$$

- On pose un palet sur une planche que l'on incline progressivement. Déterminer la valeur à partir de laquelle le palet commence à glisser, sachant qu'on appelle f_s le coefficient de frottement statique et f_d le coefficient de frottement dynamique entre le palet et la planche.

2,5 schéma $\textcircled{*}$

PFD au palet :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \alpha - T \textcircled{*} & (\text{orientation de } \vec{T} \text{ dans le sens opposé à } \vec{v}_g) \\ m\ddot{z} = 0 = -mg \cos \alpha + N \textcircled{*} \end{cases}$$

Juste avant que le glissement s'amorce, $\ddot{x} = 0$ et $T = f_s N$

$\Rightarrow T = mg \sin \alpha = f_s N = f_s mg \cos \alpha$, soit $\boxed{\tan \alpha_c = f_s}$ pour le début du glissement. $\textcircled{*}$