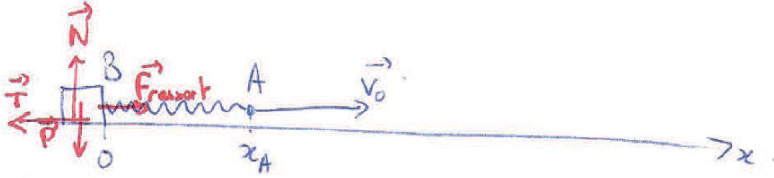


Correction - DM n°5 - Mécanique

1 Masse tirée par un ressort



1) Mise en mouvement lorsqu'il y a glissement, lorsque $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$.

Avant glissement: \rightarrow forcement orienté vers l'amorce.

$$\text{TRC: } \begin{cases} 0 = -T + F_{\text{ressort}} \\ 0 = N - P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = -k(x_A - x_B - l_0) \underset{-\vec{U}_x}{\vec{U}_{\text{extr}}} \cdot \underset{\vec{U}_x}{\vec{U}_x} = k(x_A(t) - 0 - l_0) \\ N = mg \end{cases}$$

$$\text{or } x_A(t) = v_0 t + l_0$$

$$\Rightarrow T = fN \Rightarrow k v_0 t = f m g \Rightarrow \boxed{t_0 = \frac{f m g}{k v_0}}$$

2) Quand il y a glissement, $\|\vec{T}\| = \mu\|\vec{N}\|$ et \vec{T} orienté suivant $-\vec{U}_y \parallel -\vec{U}_x$.

$$\text{TRC: } \begin{cases} m \ddot{x} = -\mu m g + k(\underbrace{v_0 t + l_0}_{x_A(t)} - \underbrace{x}_{x_B(t)} - l_0) \\ t > t_0 \quad N = m g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}(x - v_0 t) = -\mu g \quad \text{or } \ddot{y} = \ddot{x} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{\frac{m}{\omega_0^2}} y = -\mu g$$

$$\Rightarrow x - v_0 t = -\frac{\mu g}{\omega_0^2} + A \cos(\omega_0(t-t_0)) + B \sin(\omega_0(t-t_0))$$

$$\Rightarrow x(t_0) = 0 = -\frac{\mu g}{\omega_0^2} + A + v_0 t_0 \Rightarrow A = \frac{\mu g}{\omega_0^2} - v_0 t_0 = \frac{m g (\mu - f)}{k}$$

$$\begin{aligned} & \uparrow t_0, \text{ le mobile} \\ & \downarrow \text{ n'a pas encore glissé} \\ \dot{x}(t_0) = 0 &= \omega_0 B + v_0 \Rightarrow B = -\frac{v_0}{\omega_0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x(t) = v_0 t - \frac{\mu g m}{k} + \frac{m g (\mu - f)}{k} \cos(\omega_0(t-t_0)) - \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0(t-t_0))$$

3. Voir fichier Capytale : e5a4-711214.

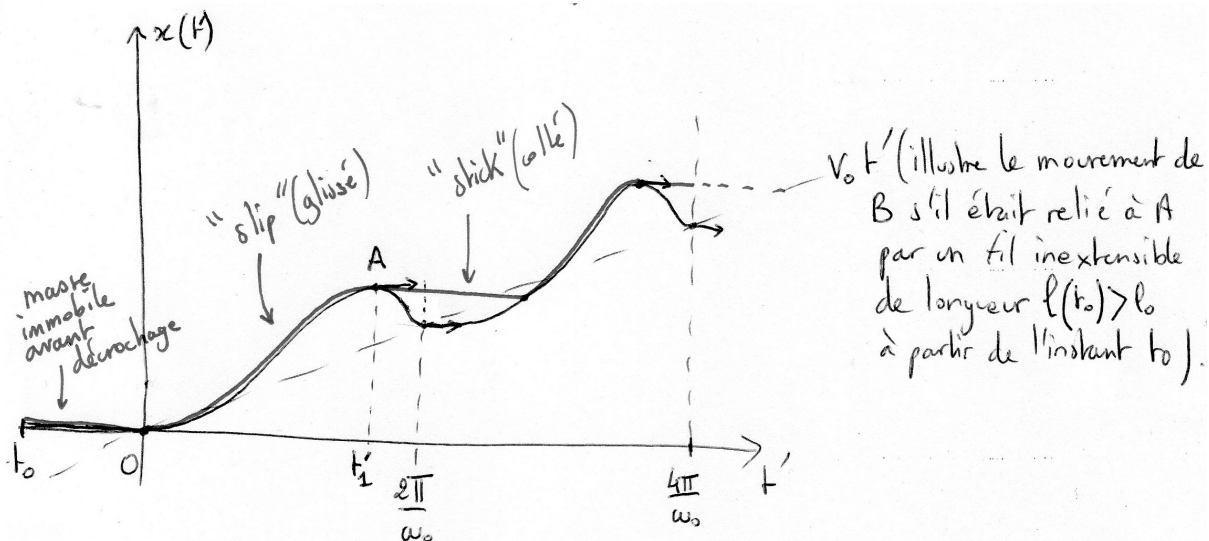
Complément : On cherche maintenant l'instant t_1 pour lequel le glissement s'arrête, c'est à dire lorsque la vitesse de glissement $\dot{x}(t)$ s'annule :

$$\dot{x}(t) = v_0 + \frac{(f - \mu)}{k} \omega_0 \sin[\omega_0(t - t_0)] - v_0 \cos[\omega_0(t - t_0)]$$

La vitesse s'annule de façon évidente pour $t = \frac{2\pi}{\omega_0}$, mais recherchons maintenant si elle ne peut s'annuler avant.

Trçons $x(t)$ pour voir quand la vitesse $\dot{x}(t)$ (c'est à dire la vitesse de glissement) s'annule ; il est commode dans ce cas de réexprimer $x(t)$ sous la forme $x(t')$ avec $t' = t - t_0 \geq 0$

$$x(t') = v_0 t' + (f - \mu) \frac{mg}{k} [1 - \cos(\omega_0 t')] - \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t')$$



Lorsque $t' = \frac{2\pi}{\omega_0}$, $x(t' = \frac{2\pi}{\omega_0}) = v_0 \frac{2\pi}{\omega_0} + 0 + 0 = v_0 t'$ et la courbe représentative de (*) croise la droite $x(t') = v_0 t'$

Essayons d'exprimer t_1 en fonction des données ; sachant que $t'_1 = t_1 - t_0$ correspond à la première annulation de la vitesse de glissement, en A :

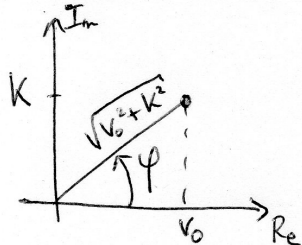
$$\dot{x}(t'_1) = v_0 + (f - \mu) \frac{mg \omega_0}{k} \sin(\omega_0 t'_1) - v_0 \cos(\omega_0 t'_1) = 0$$

$$\Rightarrow v_0 = v_0 \cos(\omega_0 t'_1) - \frac{(f - \mu) mg \omega_0}{k} \sin(\omega_0 t'_1)$$

noté K ensuite pour simplifier ($K > 0$ car $f > \mu$).

$$\text{soit } \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + k^2}} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + k^2}} \cos(\omega_0 t_1') - \frac{k}{\sqrt{v_0^2 + k^2}} \sin(\omega_0 t_1')$$

on identifie avec $\cos \varphi \cos \Psi - \sin \varphi \sin \Psi = \cos(\varphi + \Psi)$
sachant que la transformation précédente a permis d'assurer
que $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$.



$$\text{donc } \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + k^2}} = \cos(\omega_0 t_1' + \varphi)$$

avec $\varphi = \arccos\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + k^2}}\right)$
toujours ≤ 1 .

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_0 t_1' + \varphi = \arccos \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + k^2}} [2\pi] \Rightarrow t_1' = 0 \left[\frac{2\pi}{\omega_0} \right] \\ \omega_0 t_1' + \varphi = -\arccos \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + k^2}} [2\pi] \Rightarrow t_1' = -\frac{2\pi}{\omega_0} \arccos\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + k^2}}\right) + \frac{2\pi}{\omega_0} \end{cases}$$

Seule la solution non nulle nous intéresse, de sorte que :

$$t_1 = t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0} - \frac{2}{\omega_0} \arccos\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + \left[\frac{(f-\mu)g}{\omega_0}\right]^2}}\right)$$

Analysons cette expression :

→ si $\mu = f$ (pas de différence entre frottement statique et dynamique),
alors $t_1 = t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}$ il n'y a jamais de phase "stick", c'est à
dire que la masse se remet à glisser dès qu'elle s'arrête.

En $t = t_1$, la masse s'arrête puisque la vitesse de glissement s'annule, et comme la longueur du ressort est en train de diminuer, le glissement s'arrête jusqu'à ce que la condition de glissement soit à nouveau atteinte pour un instant ultérieur lorsque le ressort s'étire à nouveau.

Pour la suite du mouvement, il se produit une alternance de phases de "collé" et de "glissé". Ce phénomène est appelé "stick-slip" et se retrouve dans de nombreux phénomènes physiques : crissement d'une craie sur un tableau, grincement d'une porte, frottement d'un archet sur une corde de violon...