

## Correction - DM n°6 - Electrostatique

### 1 Calculs de champs $\vec{E}$ créés par une distribution de charge

#### 1. Symétries et invariances

Soit un point  $M$  quelconque. Étudions les propriétés du champ électrostatique au point  $M$ .

Tout plan passant par  $M$  et contenant le vecteur  $(O, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie pour la distribution de charge.

Comme le champ électrostatique est un vecteur polaire, il appartient, au point  $M$ , à tout plan de symétrie passant par  $M$ .

On en déduit que le champ appartient à l'intersection des plans de symétrie passant par  $M$

$$\vec{E}(M) = E(M) \vec{u}_z$$

Par ailleurs, la distribution de charges est invariante par translation suivant les vecteurs  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ . Le champ électrostatique ne dépend donc ni de  $x$ , ni de  $y$ .

Finalement, on trouve

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z$$

Soit un point  $M$  appartenant au plan  $z = 0$ . Le plan  $z = 0$  est un plan de symétrie pour la distribution de charge comme pour la distribution de courant.

Le champ électrostatique étant un vecteur polaire, il appartient, au point  $M$ , à tout plan de symétrie passant par  $M$ . Or la question précédente a montré que  $\vec{E} = E \vec{u}_z$ . En  $z = 0$ ,  $\vec{E}$  est perpendiculaire à un plan de symétrie, ce qui n'est possible que si

$$\vec{E}(z = 0) = \vec{0}$$

#### 2. Calcul du champ électrostatique

On cherche le champ électrostatique en un point  $M$  quelconque de l'espace de cote  $z$ .

Choisissons comme surface fermée  $\Sigma$  un cylindre droit (on aurait tout aussi bien pu prendre un parallélépipède rectangle), de section  $S$ , perpendiculaire au plan  $z = 0$  dont la face inférieure est dans le plan  $z = 0$  et la face supérieure passe par  $M$  (voir figure ??).

Le théorème de Gauss appliqué à  $\Sigma$  s'écrit

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Mais le flux sortant du champ à travers  $\Sigma$  se décompose en une somme des flux sortants à travers la base inférieure  $S_{\text{inf}}$ , à la base supérieure  $S_{\text{sup}}$  et à la surface latérale  $S_L$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{inf}}} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{\text{sup}}} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} + \iint_{S_L} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$$

La normale étant sortante, on en déduit l'orientation des éléments de surface

$$\begin{aligned} S_{\text{sup}} &\longleftrightarrow d\vec{S} = dS \vec{u}_z \\ S_{\text{inf}} &\longleftrightarrow d\vec{S} = -dS \vec{u}_z \\ S_L &\longleftrightarrow d\vec{S} \perp \vec{u}_z \end{aligned}$$

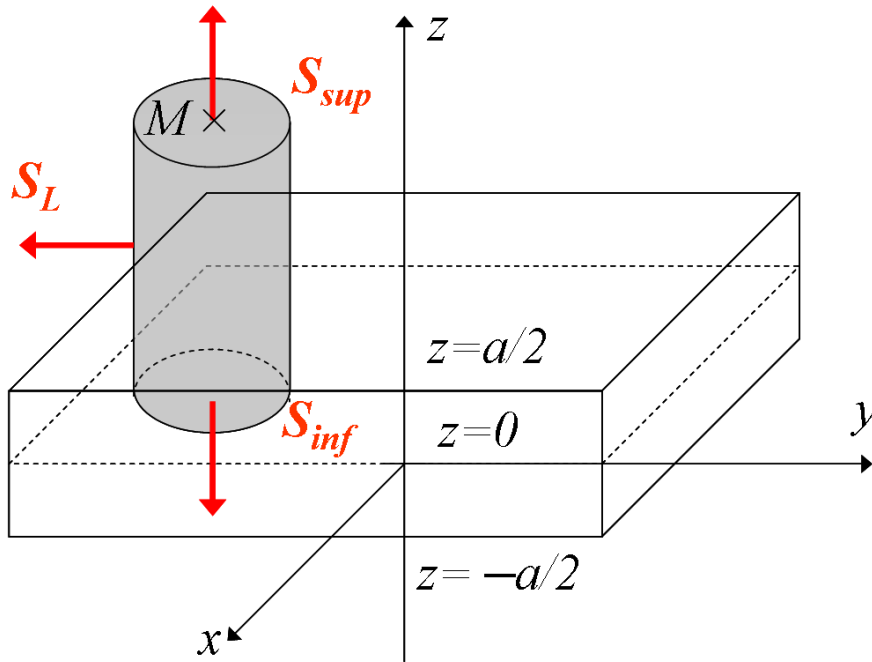


FIGURE 1 – Choix d'une surface de Gauss pour le calcul du champ électrostatique. On aurait également très bien pu choisir un parallélépipède rectangle, ou même utiliser la symétrie par rapport au .

On en déduit

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = E(z)S - E(z=0)S = E(z)S \quad \text{car} \quad E(z=0) = 0$$

La charge intérieure contenue dans  $\Sigma$  vaut

$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} \rho S z, & \text{si } 0 < z < \frac{a}{2}; \\ \rho S \frac{a}{2}, & \text{si } \frac{a}{2} < z. \end{cases}$$

On en déduit l'expression du théorème de Gauss

$$E(z)S = \begin{cases} \frac{\rho}{\epsilon_0} S z, & \text{si } 0 < z < \frac{a}{2}; \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} S \frac{a}{2}, & \text{si } \frac{a}{2} < z. \end{cases}$$

Le champ électrostatique vaut donc, pour  $z > 0$ ,

$$E(z) = \begin{cases} \frac{\rho z}{\epsilon_0}, & \text{si } 0 < z < \frac{a}{2}; \\ \frac{\rho a}{2\epsilon_0}, & \text{si } \frac{a}{2} < z. \end{cases}$$

En choisissant une surface de Gauss  $\Sigma'$  symétrique de la précédente par rapport à  $z = 0$ , on trouve, pour  $z < 0$

$$\oiint_{\Sigma'} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = -E(z)S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \begin{cases} -\frac{\rho S z}{\epsilon_0}, & \text{si } -\frac{a}{2} < z < 0; \\ \frac{\rho S a}{2\epsilon_0}, & \text{si } z < -\frac{a}{2}. \end{cases}$$

Finalement, on trouve

$$E(z) = \begin{cases} \frac{\rho z}{\epsilon_0}, & \text{si } -\frac{a}{2} < z < 0; \\ -\frac{\rho a}{2\epsilon_0}, & \text{si } z < -\frac{a}{2}. \end{cases}$$

On aurait pu également utiliser le fait que le champ électrique est impair :

$$E(-z) = -E(z)$$

. Ceci s'interprète à l'aide de la figure ci-dessous, dans laquelle on a représenté le **champ électrostatique symétrique par rapport au plan  $z = 0$**  car c'est également un plan de symétrie de la distribution de charge.

$$E(z) \times (\vec{u}_z) = E(-z) \times \underbrace{(-\vec{u}_z)}_{\text{symétrique de } \vec{u}_z} \Rightarrow E(-z) = -E(z)$$

On retrouve bien le même résultat.

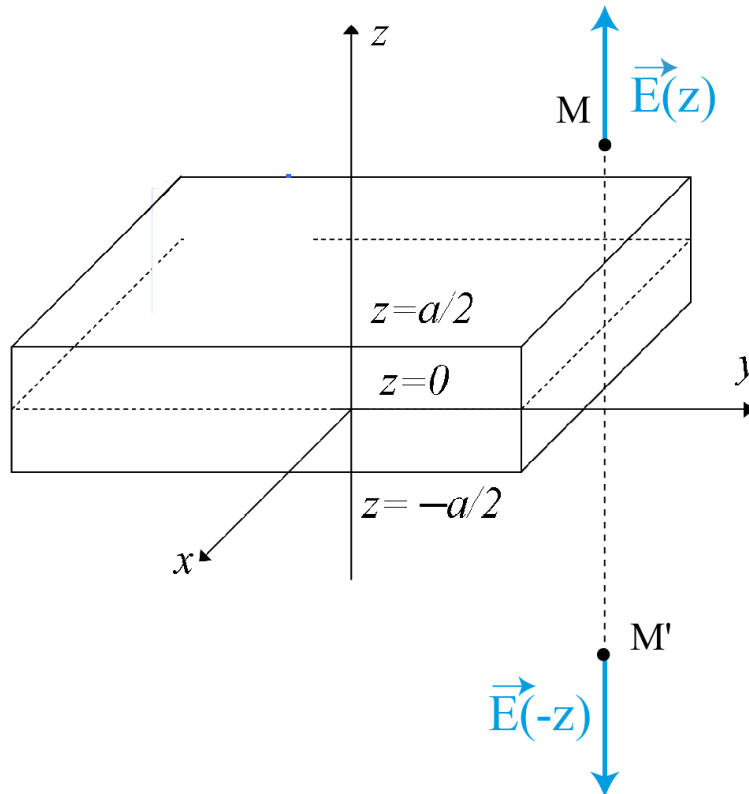


FIGURE 2 – Utilisation de la symétrie de la distribution de charge par rapport au plan  $z = 0$ .

On note  $E_0 = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}$ . La figure ci-dessous représente le graphe de  $E(z)$  en fonction de  $z/(a/2)$ .

Globalement, le champ électrostatique diverge à partir des sources (charges) et est bien continu car il n'existe pas de charges surfaciques.

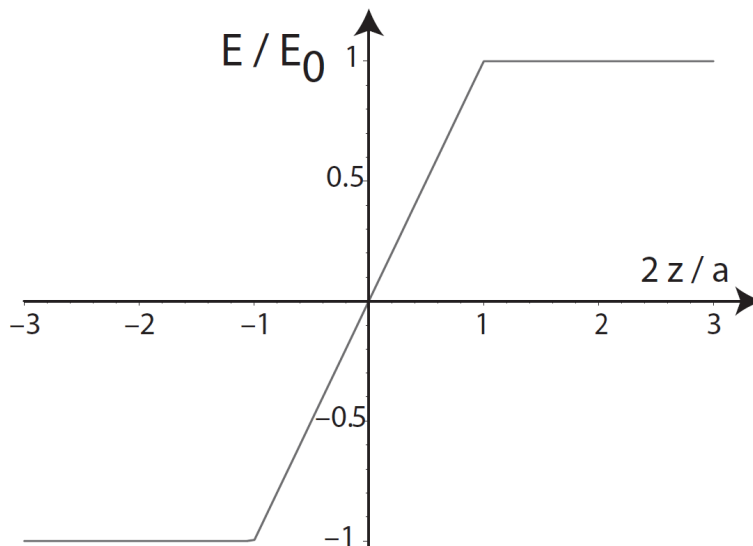


FIGURE 3 – Graphe de  $E(z)/E_0$  en fonction de  $z/(a/2)$ . On note  $E_0 = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}$ .

Finalement, le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho a}{2\epsilon_0} \vec{u}_z, & \text{si } z > \frac{a}{2} \\ \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{u}_z, & \text{si } -\frac{a}{2} < z < 0 \\ -\frac{\rho a}{2\epsilon_0} \vec{u}_z, & \text{si } z < -\frac{a}{2} \end{cases}$$

### 3. Calcul du potentiel électrostatique

En utilisant  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$  et en fixant  $V = 0$  en  $z = 0$ , on obtient bien en utilisant la continuité du potentiel en  $V = \pm \frac{a}{2}$  :

$$V = \begin{cases} C_1 - \frac{\rho a z}{2\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}, & \text{si } z > \frac{a}{2} \\ C_1 - \frac{\rho z^2}{2\epsilon_0}, & \text{si } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \\ C_1 + \frac{\rho a z}{2\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}, & \text{si } z < -\frac{a}{2} \end{cases}$$