

Correction - DS physique n°2bis (Centrale-Mines)

1 Résolution de problème : la centrifugeuse

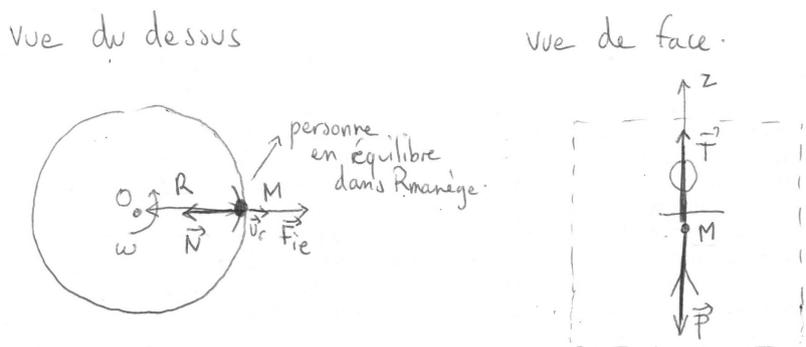
C'est la force centrifuge qui plaque les personnes sur le mur dans le référentiel du manège. Ceux-ci restent en équilibre dans la mesure où ils ne glissent pas vers le bas sur le caoutchouc.

Déterminons les conditions nécessaires sur la vitesse angulaire du manège afin que cela soit possible.

Un passager de masse m est immobile dans le référentiel du manège $\mathcal{R}_{\text{manège}}$ non galiléen, donc (la force d'inertie de Coriolis est nulle) :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_{ie}$$

où \vec{T} est la force de frottement entre le dos des personnes et le caoutchouc de l'intérieur du cylindre, qui s'oppose au glissement des personnes vers le bas, avec $\vec{T} = T\vec{u}_z$, et $T > 0$ (cf figure ci-dessous).



En projection sur \vec{u}_r , on obtient : $0 = -N + mR\omega^2$, où R est le rayon du cylindre et ω sa vitesse angulaire de rotation.

En projection sur \vec{u}_z , on obtient : $0 = T - mg$.

Or, d'après les lois de Coulomb, en notant f_s le coefficient de frottement statique entre le dos des personnes et le cylindre, l'immobilité par rapport au support persiste tant que :

$$\|\vec{T}\| < f_s \|\vec{N}\| \quad \text{soit} \quad mg < f_s m R \omega^2 \Rightarrow \boxed{\omega > \sqrt{\frac{g}{f_s R}}}$$

AN : avec $r \simeq 2$ m, $g \simeq 10$ m.s⁻² et $f_s \simeq 0,5$, on obtient : $\omega > \sqrt{10}$ rad.s⁻¹ $\simeq 0,5$ tour.s⁻¹. Cela semble être un ordre de grandeur raisonnable : 1 tour toutes les 2 secondes est rapide pour un grand dispositif, mais correspond à une accélération de $R\omega^2 = 2''g''$, ce qui est tout à fait supportable pour une personne normale, qui supporte jusqu'à 10''g'' en accélération horizontale).

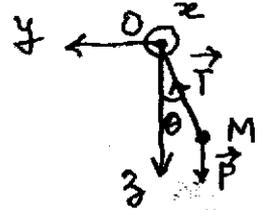
En respectant cette condition, il est possible se rester en contact avec le cylindre en ayant la tête en bas, comme sur la gauche de la photo. Cependant, cela n'empêchera pas d'être dans une position très inconfortable car le sang descendra tout de même dans la tête...

2 - Quelques tests expérimentaux du principe d'équivalence

(13) * La masse dite $m^{(k)}$ évolue dans le plan vertical Oyz ; elle est soumise à :

- son poids $\vec{P} = +m_G^{(k)} g_0 \vec{e}_z$

- et la tension \vec{T} du fil, parallèle à \vec{OM} .



* On applique le théorème du moment cinétique par rapport à Oz , avec

$$L_{Oz} = m_I^{(k)} l^2 \dot{\theta} ; \quad \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = -m_G^{(k)} g_0 l \sin\theta \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{Oz}(\vec{T}) = 0$$

(bras de levier $-l \sin\theta$) (bras de levier nul)

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{T}) \Rightarrow m_I^{(k)} l^2 \ddot{\theta} = -m_G^{(k)} g_0 l \sin\theta$$

ie

$$\ddot{\theta} + \frac{m_G^{(k)}}{m_I^{(k)}} \frac{g_0}{l} \sin\theta = 0$$

* Dans la limite des petits mouvements, $\theta \ll \pi$, donc $\sin\theta \approx \theta$, d'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{m_G^{(k)}}{m_I^{(k)}} \frac{g_0}{l} \theta = 0$$

(14) * on reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega_k = \sqrt{\frac{m_G^{(k)}}{m_I^{(k)}} \frac{g_0}{l}} = \sqrt{(1+\eta_k) \frac{g_0}{l}} \quad \text{d'où} \quad T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\eta_k}} \sqrt{\frac{l}{g_0}} = T_k$$

* si le principe d'équivalence est vérifié, $\eta_k = 0$, d'où

ainsi $T_k = \frac{T_0}{\sqrt{1+\eta_k}}$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_0}}$$

(15) * comme $|\eta_k| \ll 1$, $T_k \approx T_0 (1 - \frac{1}{2} \eta_k)$, donc

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2} \approx \frac{T_0(1 - \frac{1}{2}\eta_1) - T_0(1 - \frac{1}{2}\eta_2)}{T_0(1 - \frac{1}{2}\eta_1) + T_0(1 - \frac{1}{2}\eta_2)} \approx -\frac{1}{4}(\eta_1 - \eta_2)$$

au 1^{er} ordre en η_1 et η_2

$$\approx -\frac{1}{4} \epsilon_{12} \approx \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}$$

(16) On cherche à détecter $\epsilon_{12} \approx 10^{-15}$ et $T_1 - T_2 \approx -\frac{1}{2} \epsilon_{12} T_0 \approx 10^{-15} T_0$
 Il faut pouvoir détecter de l'ordre de 1 période d'écart, il faut donc observer de l'ordre de 10^{15} périodes, ce qui est impossible, d'autant plus que les oscillations sont en réalité amorties. On peut espérer observer l'écart sur 1000 périodes et donc le PE peut être testé à 10^{-3} près.

(17) * $X(t)$ repère la position de m dans le boîtier. L'étude est donc menée dans le référentiel (R') du boîtier, qui n'est pas galiléen.

* La masse m est soumise :

- à la force de rappel du ressort $\vec{F} = -kX\vec{e}_x$
- à la force de frottement $\vec{F} = -h\dot{X}\vec{e}_x$
- au poids $\vec{P} = -mg_0\vec{e}_z$
- à la force de contact exercée par l'axe, normale à \vec{e}_x
- la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_ie = -ma\vec{e}_z$

* on applique la 2^e loi de Newton dans R' :

$$m\ddot{X}\vec{e}_x = -kX\vec{e}_x - h\dot{X}\vec{e}_x - mg_0\vec{e}_z + N\vec{e}_z - ma\vec{e}_z$$

et on projette sur Ox :

$$m\ddot{X} = -kX - h\dot{X} - ma$$

$$\ddot{X} + \frac{h}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = -a$$

$$\ddot{X} + \frac{h}{m}\dot{X} + \omega_0^2 X = -a$$

(18) L'équation caractéristique est $\kappa^2 + \frac{h}{m}\kappa + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta' = \left(\frac{h}{2m}\right)^2 - \omega_0^2$$

* si $\Delta' < 0$ ie $\frac{h}{2m} < \omega_0$ ie $h < 2m\omega_0$ les solutions sont pseudosinusoidales de pulsation $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{h}{2m}\right)^2}$;

$$X(t) = e^{-\frac{h}{2m}t} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) - \frac{a}{\omega_0^2}$$

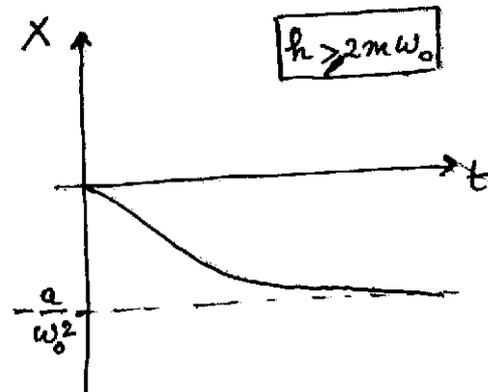
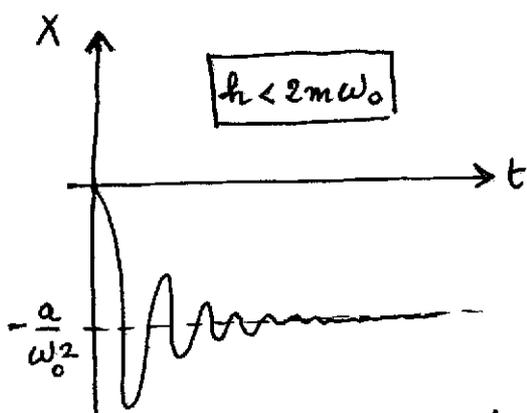
A et B étant des constantes d'intégration

* si $\Delta' > 0$ ie $h > 2m\omega_0$ les solutions sont aperiodes :

$$X(t) = A' e^{-\left(\frac{h}{2m} + \sqrt{\left(\frac{h}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}\right)t} + B' e^{-\left(\frac{h}{2m} - \sqrt{\left(\frac{h}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}\right)t} - \frac{a}{\omega_0^2}$$

* si $\Delta' = 0$ ie $h = 2m\omega_0$

$$X(t) = (A'' t + B'') e^{-\omega_0 t} - \frac{a}{\omega_0^2}$$



⇒ le déplacement stationnaire de la masse, de $\left(-\frac{a}{\omega_0^2}\right)$, permet d'accéder à la mesure de a , avec un temps de réponse de l'ordre du temps caractéristique

(19) * si $h < 2m\omega_0$, $\tau = \frac{2m}{h}$

* si $h = 2m\omega_0$, $\tau = \frac{1}{\omega_0}$

* si $h > 2m\omega_0$,

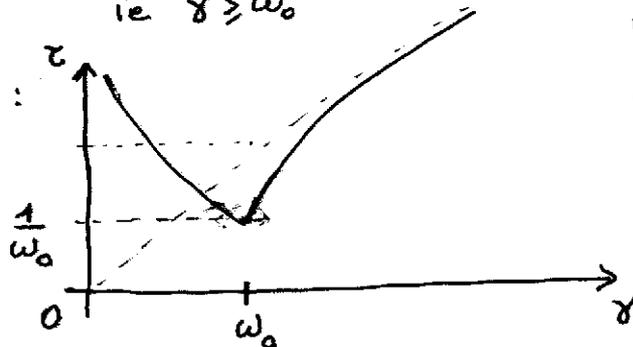
$$\tau = \sup \left(\frac{1}{\frac{h}{2m} + \sqrt{\left(\frac{h}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}}, \frac{1}{\frac{h}{2m} - \sqrt{\left(\frac{h}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}} \right)$$

si $h > 2m\omega_0$
 $\Rightarrow \tau = \frac{1}{\frac{h}{2m} - \sqrt{\left(\frac{h}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}}$

(20) $\tau = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} & \text{pour } h \leq 2m\omega_0 \text{ ie } \gamma \leq \omega_0 \\ \frac{1}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} & \text{pour } h \geq 2m\omega_0 \\ & \text{ie } \gamma \geq \omega_0 \end{cases}$

avec $\gamma = \frac{h}{2m}$

D'où l'allure :



$\tau_{\min} = \frac{1}{\omega_0}$

(21) AN * $\gamma = \frac{\omega_0}{5} < \omega_0$ donc $\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{5}{\omega_0} = \frac{5}{2\pi \times 5500} \approx 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ s} = \tau$

* Le déplacement stationnaire est $X_\infty = -\frac{a}{\omega_0^2} = -\frac{10}{(2\pi \times 5500)^2} \text{ m}$

$|X_\infty| = 8,4 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 8,4 \text{ nm}$

(22) On modifie l'équation du mouvement trouvée en 17 :

$$m \ddot{\vec{x}} = -m\omega_0^2 X \vec{u} - h \dot{X} \vec{u} + m \vec{g}_0 + \vec{N} - m \vec{a}$$

et on la projette sur \vec{u} pour faire disparaître \vec{N} inconnu :

$$m \ddot{X} + m\omega_0^2 X + h \dot{X} = m (\vec{g}_0 - \vec{a}) \cdot \vec{u}$$

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X + \frac{h}{m} \dot{X} = (\vec{g}_0 - \vec{a}) \cdot \vec{u}$$

* l'accéléromètre aura un déplacement stationnaire de $-\frac{(\vec{a} - \vec{g}_0) \cdot \vec{u}}{\omega_0^2}$ et donnera donc la mesure de la grandeur $(\vec{a} - \vec{g}_0) \cdot \vec{u}$

Rq : un accéléromètre immobile vertical donne la mesure de $\pm g_0$ (selon son sens)

(23)* Si l'accéléromètre est horizontal, seule intervient la masse d'inertie, ce qui ne permet pas de tester le principe d'équivalence. Par contre, si l'accéléromètre est incliné, la grandeur mesurée est $(\vec{a} - \frac{m_G}{m_I} \vec{g}_0) \cdot \vec{u}$ au lieu de $(\vec{a} - \vec{g}_0) \cdot \vec{u}$.

Rege: il faudrait s'intéresser au principe de mesure du déplacement stationnaire (mesure électrostatique, par capacité) pour déterminer l'incertitude sur η que l'on peut attendre de telles mesures.

2.2 - Étude de la distance Terre-Lune

(24)* Le référentiel géocentrique (R_G) est le référentiel dans lequel le centre de la Terre est fixe, qui est en translation par rapport au référentiel (R_K)

* Comme le centre de la Terre n'a pas une vitesse constante dans (R_R), (R_G) n'est pas galiléen

(25)* Le Soleil exerce sur la Terre la force

$$\vec{F}_{S \rightarrow T} = -G \frac{m_G^{(T)} m_G^{(S)}}{D^2} \vec{e}_r \quad \text{en coordonnées polaires sur la trajectoire circulaire}$$

$$= -m_I^{(T)} D \Omega^2 \vec{e}_r \quad \text{si l'on néglige la force exercée par la Lune sur la Terre}$$

$$\text{D'où } \Omega^2 = G \frac{m_G^{(S)}}{m_I^{(T)}} \frac{m_G^{(S)}}{D^3}$$

$$\Omega = \sqrt{G \frac{m_G^{(S)}}{D^3} \frac{m_G^{(T)}}{m_I^{(T)}}}$$

(26) c'est l'accélération du mouvement circulaire uniforme de T dans R_K : $\vec{a}_{R_G/R_K} = -D \Omega^2 \vec{e}_r = -\Omega^2 \vec{ST} = \vec{a}_{R_G/R_K}$

(27) Les forces à prendre en compte pour la Lune dans R_G

$$\text{sont } \vec{F}_{T \rightarrow L} = -G \frac{m_G^{(L)} m_G^{(T)}}{TL^3} \vec{T}_L$$

$$\vec{F}_{S \rightarrow L} = -G \frac{m_G^{(L)} m_G^{(S)}}{SL^3} \vec{S}_L$$

$$\text{et } \vec{F}_{ie} = -m_I^{(L)} \vec{a}_{R_G/R_K}$$

$$\text{donc } m_I^{(L)} \left(\frac{d\vec{v}_L}{dt} \right)_{R_G} = -G \frac{m_G^{(L)} m_G^{(T)}}{TL^3} \vec{T}_L - G \frac{m_G^{(L)} m_G^{(S)}}{SL^3} \vec{S}_L + m_I^{(L)} \Omega^2 \vec{ST}$$

28) a) Cette approximation consiste à considérer que le champ gravitationnel créé par le Soleil est quasi-uniforme au voisinage de l'ensemble de la Terre et de la Lune. Alors :

$$m_I^{(L)} \left(\frac{d\vec{v}_L}{dt} \right)_{R_G} = - \frac{G m_G^{(L)} m_G^{(T)}}{TL^3} \vec{T}_L - \frac{G m_G^{(L)} m_G^{(S)}}{ST^3} \vec{S}_T + m_I^{(L)} \Omega^2 \vec{S}_T$$

b)

$$\vec{F}_S = m_I^{(L)} \Omega^2 \vec{S}_T - \frac{G m_G^{(S)}}{D^3} m_G^{(L)} \vec{S}_T = m_I^{(L)} \Omega^2 \vec{S}_T - \frac{m_I^{(T)}}{m_G^{(T)}} m_G^{(L)} \Omega^2 \vec{S}_T$$

$$\Omega^2 \frac{m_I^{(T)}}{m_G^{(T)}}$$

$$\vec{F}_S = m_I^{(L)} \Omega^2 \vec{S}_T \left(1 - \frac{m_I^{(T)}}{m_G^{(T)}} \frac{m_G^{(L)}}{m_I^{(L)}} \right) = \frac{m_I^{(T)}}{m_G^{(T)}} m_I^{(L)} \Omega^2 \left(\frac{m_G^{(T)}}{m_I^{(T)}} - \frac{m_G^{(L)}}{m_I^{(L)}} \right) \vec{S}_T$$

α
 $\mathcal{O}_{T,L}$

on obtient alors

$$\vec{F}_S = \alpha m_I^{(L)} \Omega^2 \mathcal{O}_{T,L} \vec{S}_T$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{m_I^{(T)}}{m_G^{(T)}} = \frac{1}{1+\eta_T} \approx 1$$

29) Si le principe d'équivalence est vérifié, $\mathcal{O}_{T,L} = 0 \Rightarrow \vec{F}_S = \vec{0}$

30) * La Lune étant dans un état lié avec la Terre, ses trajectoires possibles sont les ellipses dont T est l'un des foyers, puisque seul intervient le champ gravitationnel créé par la Terre ($\vec{F}_S = \vec{0}$), qui est un champ newtonien.

31) * dans (R_G) $m_I^{(L)} \left(\frac{d\vec{v}_L}{dt} \right)_{R_G} = - \frac{G m_G^{(L)} m_G^{(T)}}{TL^3} \vec{T}_L$, c'est pourquoi

(R_G) peut être considéré comme galiléen, à condition de ne pas prendre en compte la force exercée par le Soleil sur la Lune.

a) * dans (R'_G) non galiléen en rotation par rapport à (R_G) , il faut tenir compte des forces d'inertie :

- d'entraînement : $\vec{f}_{ie} = -m_I^{(L)} \vec{\omega}_0 \wedge (\vec{\omega}_0 \wedge \vec{r}) = m_I^{(L)} \omega_0^2 (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)$

- la force de Coriolis : $\vec{f}_c = -m_I^{(L)} \vec{\omega}_0 \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = -m_I^{(L)} \omega_0 \vec{e}_z \wedge (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z)$

Finalemment :

$$m_I^{(L)} \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = - \frac{\gamma m_G^{(L)} m_G^{(T)}}{r^3} \vec{r} - m_I^{(L)} \omega_0 \wedge (\omega_0 \wedge \vec{r}) - m_I^{(L)} \omega_0 \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

b) La Lune est à l'équilibre dans \mathcal{R}'_G , donc $\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{0}$ et $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{0}$,
d'où

$$- \frac{\gamma m_G^{(L)} m_G^{(T)}}{d^3} \vec{r} + m_I^{(L)} \omega_0^2 (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) = 0$$

ie

$$\begin{cases} - \frac{\gamma m_G^{(L)} m_G^{(T)}}{d^3} x + m_I^{(L)} \omega_0^2 x = 0 \\ - \frac{\gamma m_G^{(L)} m_G^{(T)}}{d^3} y + m_I^{(L)} \omega_0^2 y = 0 \\ - \frac{\gamma m_G^{(L)} m_G^{(T)}}{d^3} z = 0 \end{cases}$$

ce système admet des solutions non nulles \Leftrightarrow

$$\frac{\gamma m_G^{(L)} m_G^{(T)}}{d^3} = m_I^{(L)} \omega_0^2$$

ie
$$d = \left(\frac{\gamma m_G^{(L)} m_G^{(T)}}{m_I^{(L)} \omega_0^2} \right)^{1/3}$$

* toutes les positions (x, y, z) vérifiant

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = d$ sont donc des positions d'équilibre de la Lune dans (\mathcal{R}'_G) . Ce sont toutes les positions situées sur le cercle de centre T et de rayon d calculé ci-dessus.

* lorsque la Lune est à l'équilibre dans (\mathcal{R}'_G) , elle décrit une orbite circulaire dans (\mathcal{R}_G) .

(32) a)
$$\vec{F}_T = - \frac{\gamma m_G^{(L)} m_G^{(T)}}{m_I^{(L)} d^3 \omega_0^2} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

et
$$\vec{r} = d \vec{e}_x + \delta \vec{x}$$

$$= (d+x) \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$\approx - m_I^{(L)} \omega_0^2 \frac{1}{d^3} \left(1 - \frac{3x}{d}\right) (d \vec{e}_x + \delta \vec{x})$$

$$r = \sqrt{(d+x)^2 + y^2 + z^2}$$

$$= d \sqrt{\left(1 + \frac{x}{d}\right)^2 + \frac{y^2}{d^2} + \frac{z^2}{d^2}} = d \left(1 + \frac{2x}{d}\right)^{1/2}$$

donc
$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{d^3} \left(1 + \frac{2x}{d}\right)^{-3/2} \approx \frac{1}{d^3} \left(1 - \frac{3x}{d}\right)$$

Donc

$$* F_{Tx} = - m_I^{(L)} \omega_0^2 \left(1 - \frac{3x}{d}\right) (d+x)$$

$$= - m_I^{(L)} \omega_0^2 d \left(1 - \frac{3x}{d}\right) \left(1 + \frac{x}{d}\right)$$

$$= - m_I^{(L)} \omega_0^2 d \left(1 - \frac{2x}{d}\right) = F_{Tx}$$

$$* F_{Ty} = - m_I^{(L)} \omega_0^2 \left(1 - \frac{3x}{d}\right) y \approx - m_I^{(L)} \omega_0^2 y = F_{Ty} \text{ au 1er ordre}$$

$$* F_{Tz} = - m_I^{(L)} \omega_0^2 \left(1 - \frac{3x}{d}\right) z \approx - m_I^{(L)} \omega_0^2 z = F_{Tz} \text{ au 1er ordre}$$

b) L'équation de 31 a) devient :

$$m_I^{(L)} \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}_T - m_I^{(L)} \vec{\omega}_0 \wedge (\vec{\omega}_0 \wedge \vec{x}) - 2 m_I^{(L)} \vec{\omega}_0 \wedge \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} F_{Tx} \\ F_{Ty} \\ F_{Tz} \end{array} & \begin{array}{l} m_I^{(L)} \omega_0^2 \\ \\ \end{array} & \begin{array}{l} d+x \\ y \\ 0 \end{array} \end{array} \quad - 2 m_I^{(L)} \omega_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad \text{ds } Txyz$$

$$\begin{array}{c|c} 2 m_I^{(L)} \omega_0 & \begin{array}{l} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{array} \end{array}$$

D'où, en projection :

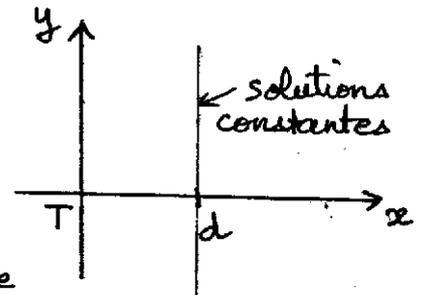
$$\begin{cases} m_I^{(L)} \ddot{x} = -m_I^{(L)} \omega_0^2 (d-2x) + m_I^{(L)} \omega_0^2 (d+x) + 2 m_I^{(L)} \omega_0 \dot{y} \\ m_I^{(L)} \ddot{y} = -m_I^{(L)} \omega_0^2 y + m_I^{(L)} \omega_0^2 y - 2 m_I^{(L)} \omega_0 \dot{x} \\ m_I^{(L)} \ddot{z} = -m_I^{(L)} \omega_0^2 z \end{cases}$$

$$\text{ie } \begin{cases} \ddot{x} = 3\omega_0^2 x + 2\omega_0 \dot{y} \\ \ddot{y} = -2\omega_0 \dot{x} \\ \ddot{z} = -\omega_0^2 z \end{cases}$$

c) * Les solutions constantes sont

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\text{cste} \\ \dot{z}=0 \end{cases}$$

* Elles correspondent à des mouvements dans \mathbb{R}_G qui sont selon la tangente au cercle de rayon d parcouru dans \mathbb{R}_G .



33) comme le système est linéaire, on trouve X, Y, Z en injectant les composantes de $\delta \vec{x} = (\underline{X} \vec{e}_x + \underline{Y} \vec{e}_y + \underline{Z} \vec{e}_z) e^{i\omega t}$ dans le système précédent.

$$\begin{aligned} x &\leftrightarrow \underline{X} \\ \dot{x} &\leftrightarrow j\omega \underline{X} \\ \ddot{x} &\leftrightarrow -\omega^2 \underline{X} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} -\omega^2 \underline{X} = 3\omega_0^2 \underline{X} + 2i\omega_0 \omega \underline{Y} \\ -\omega^2 \underline{Y} = -2i\omega_0 \omega \underline{X} \\ -\omega^2 \underline{Z} = -\omega_0^2 \underline{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3\omega_0^2 + \omega^2) \underline{X} + 2i\omega_0 \omega \underline{Y} = 0 \\ -2i\omega_0 \omega \underline{X} + \omega^2 \underline{Y} = 0 \\ (\omega^2 - \omega_0^2) \underline{Z} = 0 \end{cases}$$

a) Les solutions sont non nulles si le déterminant de ce système est non nul ie $\omega^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{\omega = 0 \text{ ou } \omega = \pm \omega_0}$$

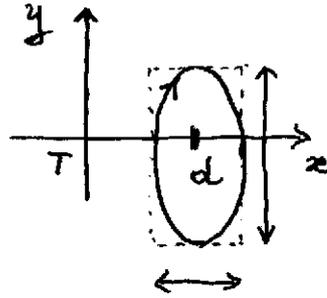
b) pour $\omega = \omega_0$ $2i\omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 \underline{y} \Rightarrow \underline{y} = 2i \underline{x}$

$y(t) = a \sin \omega_0 t \Rightarrow x(t) = \frac{a}{2} \sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = -\frac{a}{2} \cos(\omega_0 t)$

* Donc le mouvement est de la forme $\begin{cases} x(t) = -\frac{a}{2} \cos(\omega_0 t) \\ y(t) = a \sin(\omega_0 t) \end{cases}$

* c'est l'équation paramétrique d'une ellipse parcourue dans le plan T_{xy} , de centre $(d, 0)$, dans le sens horaire.

Rq: ce mouvement correspond à une oscillation de la distance TL.



34) Avec $\vec{F} = m_I^{(L)} \text{Re}(\vec{A} e^{i\omega t})$, l'équation du mouvement de la Lune devient :

$$m_I^{(L)} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_T + \vec{F} - m_I^{(L)} \vec{\omega}_0 \wedge (\vec{\omega}_0 \wedge \vec{r}) - 2m_I^{(L)} \vec{\omega}_0 \wedge \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

ce qui conduit à ajouter $\underline{A}_x \underline{A}_y \underline{A}_z$ dans le 2^e membre du système précédent :

$$\begin{cases} -\omega^2 \underline{x} = 3\omega_0^2 \underline{x} + 2i\omega_0 \omega \underline{y} + \underline{A}_x \\ -\omega^2 \underline{y} = -2i\omega_0 \omega \underline{x} + \omega^2 \underline{y} + \underline{A}_y \\ -\omega^2 \underline{z} = -\omega_0^2 \underline{z} + \underline{A}_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3\omega_0^2 + \omega^2) \underline{x} + 2i\omega_0 \omega \underline{y} = -\underline{A}_x \\ -2i\omega_0 \omega \underline{x} + \omega^2 \underline{y} = -\underline{A}_y \\ (\omega^2 - \omega_0^2) \underline{z} = -\underline{A}_z \end{cases}$$

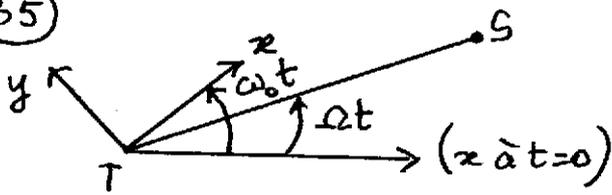
$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{x} = \frac{\begin{vmatrix} -\underline{A}_x & 2i\omega_0 \omega \\ -\underline{A}_y & \omega^2 \end{vmatrix}}{\text{Det}} = \frac{-\omega^2 \underline{A}_x + 2i\omega_0 \omega \underline{A}_y}{\omega^2(\omega^2 - \omega_0^2)} \\ \underline{y} = \frac{\begin{vmatrix} 3\omega_0^2 + \omega^2 & -\underline{A}_x \\ -2i\omega_0 \omega & -\underline{A}_y \end{vmatrix}}{\text{Det}} = \frac{-(3\omega_0^2 + \omega^2) \underline{A}_y - 2i\omega_0 \omega \underline{A}_x}{\omega^2(\omega^2 - \omega_0^2)} \\ \underline{z} = \frac{-\underline{A}_z}{\omega^2 - \omega_0^2} \end{cases} \text{ avec Det} = (3\omega_0^2 + \omega^2)\omega^2 - 4\omega_0^2 \omega^2 = \omega^2(\omega^2 - \omega_0^2)$$

Finalement $\delta \vec{r} = \text{Re}(\underbrace{\vec{R}}_{\delta \vec{r}} e^{i\omega t})$ avec

$$\delta \vec{r} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\underline{A}_x - 2i \frac{\omega_0}{\omega} \underline{A}_y \right) e^{i\omega t} \vec{e}_x + \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\left(1 + \frac{3\omega_0^2}{\omega^2}\right) \underline{A}_y + 2i \frac{\omega_0}{\omega} \underline{A}_x \right) e^{i\omega t} \vec{e}_y + \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \underline{A}_z e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

* pour $\omega = \pm \omega_0$, les composantes de \vec{S}_r deviennent infinies ;
 il y a résonance et l'approximation linéaire faite dans l'équation
 du mouvement n'est plus valable.

(35)



Dans R'_G , le soleil tourne donc à
 la vitesse angulaire $\Omega - \omega_0$

Donc $\vec{TS} = D \cos(\omega_0 - \Omega)t \vec{e}_x - D \sin(\omega_0 - \Omega)t \vec{e}_y$

$$\vec{F}_S = -\alpha m_I \frac{g_{T,L}^{(L)}}{r_{T,L}^2} \Omega^2 \vec{TS} = -\alpha m_I \frac{g_{T,L}^{(L)}}{r_{T,L}^2} \Omega^2 D \left(\cos(\omega_0 - \Omega)t \vec{e}_x - \sin(\omega_0 - \Omega)t \vec{e}_y \right)$$

$$\vec{F}_S = -\alpha m_I \frac{g_{T,L}^{(L)}}{r_{T,L}^2} \Omega^2 D e^{i(\omega_0 - \Omega)t} \vec{e}_x - \alpha m_I \frac{g_{T,L}^{(L)}}{r_{T,L}^2} \Omega^2 D e^{i[(\omega_0 - \Omega)t + \frac{\pi}{2}]} \vec{e}_y$$

$$= m_I \frac{g_{T,L}^{(L)}}{r_{T,L}^2} A e^{i\omega t} \quad (\text{forme de } \vec{F})$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{A}{x} = -\alpha \frac{g_{T,L}^{(L)}}{r_{T,L}^2} \Omega^2 D \\ \frac{A}{y} = -i\alpha \frac{g_{T,L}^{(L)}}{r_{T,L}^2} \Omega^2 D \\ \frac{A}{z} = 0 \end{cases}$$

et $\boxed{\omega = \omega_0 - \Omega}$

(36) a) On utilise les résultats de (34) :

$$\underline{X} = \frac{1}{\omega_0^2 - (\omega_0 - \Omega)^2} \left(-\alpha \frac{g_{T,L}^{(L)}}{r_{T,L}^2} \Omega^2 D - \frac{2\omega_0}{\omega_0 - \Omega} \alpha \frac{g_{T,L}^{(L)}}{r_{T,L}^2} \Omega^2 D \right)$$

$$= -\alpha \frac{g_{T,L}^{(L)}}{r_{T,L}^2} \Omega^2 D \left(1 + \frac{2\omega_0}{\omega_0 - \Omega} \right) = \boxed{-\alpha \frac{g_{T,L}^{(L)}}{r_{T,L}^2} D \frac{\Omega(3\omega_0 - \Omega)}{(2\omega_0 - \Omega)(\omega_0 - \Omega)} = \underline{X}}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{(2\omega_0 - \Omega)\Omega} \left(-\left(1 + \frac{3\omega_0^2}{(\omega_0 - \Omega)^2}\right) i\alpha \frac{g_{T,L}^{(L)}}{r_{T,L}^2} \Omega^2 D + 2i \frac{\omega_0}{\omega_0 - \Omega} \left(-\alpha \frac{g_{T,L}^{(L)}}{r_{T,L}^2} \Omega^2 D\right) \right)$$

$$= -\frac{i\alpha \frac{g_{T,L}^{(L)}}{r_{T,L}^2} \Omega^2 D}{(2\omega_0 - \Omega)\Omega} \frac{(\omega_0 - \Omega)^2 + 3\omega_0^2 + 2\omega_0(\omega_0 - \Omega)}{(\omega_0 - \Omega)^2}$$

$$= \boxed{-\frac{i\alpha \frac{g_{T,L}^{(L)}}{r_{T,L}^2} D}{2\omega_0 - \Omega} \frac{\Omega(6\omega_0^2 - 4\omega_0\Omega + \Omega^2)}{(\omega_0 - \Omega)^2} = \underline{Y}}$$

$\boxed{\underline{Z} = 0}$

* pour $\Omega \ll \omega_0$

$$\underline{X} \approx -\frac{3}{2} \alpha \frac{g}{g_{TL}} D \frac{\Omega}{\omega_0}$$

au 1^{er} ordre en $\frac{\Omega}{\omega_0}$

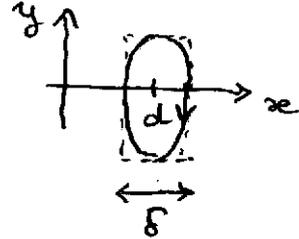
$$\underline{Y} \approx -3i \alpha \frac{g}{g_{TL}} D \frac{\Omega}{\omega_0}$$

au 1^{er} ordre en $\frac{\Omega}{\omega_0}$

$$\text{et } \underline{Z} = 0$$

* on trouve $\underline{Y} = 2i \underline{X}$ comme en 33.b car $\omega = \omega_0 - \Omega \approx \omega_0$ et le système est au voisinage de la résonance.

b) L'amplitude de variation de la distance Terre-Lune est alors



$$\delta = 3 \alpha \left| \frac{g}{g_{TL}} \right| D \frac{\Omega}{\omega_0}$$

En notant $\delta_0 = 2\text{cm}$ l'incertitude de mesure de d :

$$3 \alpha \left| \frac{g}{g_{TL}} \right| D \frac{\Omega}{\omega_0} = 3 \alpha \left| \frac{g}{g_{TL}} \right| D \frac{T_L}{T_T} < \delta_0$$

comme $\alpha \approx 1$

$$\left| \frac{g}{g_{TL}} \right| < \frac{T_T \delta_0}{3 D T_L}$$

$$\text{AN } \left| \frac{g}{g_{TL}} \right| < \frac{365 \times 2 \cdot 10^{-2}}{3 \times 1,5 \cdot 10^{11} \times 27} \approx 6 \cdot 10^{-13}$$

$$\left| \frac{g}{g_{TL}} \right| < 6 \cdot 10^{-13}$$

on vérifie donc le principe d'équivalence à environ 10^{-12} près

2.3. La mission MICROSCOPE et ses résultats

(37) On écrit la 2^e loi de Newton pour le satellite dans (R_G):

$$-m^{(s)} (R_T + d_s) \Omega_s^2 \vec{e}_r = - \frac{G m^{(s)} m^{(T)}}{(R_T + d_s)^2} \vec{e}_r \quad \text{avec } \frac{G m^{(T)}}{R_T^2} = g_0$$

D'où $\frac{4\pi^2}{T_s^2} = \frac{g_0 R_T^2}{(R_T + d_s)^3}$ et $\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$

Enfinement
$$T_s = \frac{2\pi}{R_T \sqrt{g_0}} (R_T + d_s)^{3/2}$$

(38) *
$$T_s = \frac{2\pi}{6,38 \cdot 10^6 \sqrt{9,81}} (6390 \cdot 10^3 + 710 \cdot 10^3)^{3/2} = 5,94 \cdot 10^3 \text{ s} = 1^{\text{h}} 39 \text{ min} = T_s$$

* la mission a duré environ 2,5 années, donc le nombre de révolutions du satellite est $N = \frac{2,5 \times 365 \times 24 \times 3600}{5940} \approx 13000$ révolutions

(40) Comme $\vec{F}_{el,k}$ est la force qui permet de maintenir la masse k sur sa trajectoire, il n'y a aucune autre force que $\vec{F}_{G,k}$ et $\vec{F}_{el,k}$ qui s'applique sur la masse k , donc

$$\vec{F}_k = m_G^{(k)} \vec{g}(O_k) + \vec{F}_{el,k}$$

(41) $\vec{F}_{el,k}$, $k \in \{1,2\}$, sont des forces intérieures à l'ensemble du satellite et son contenu. D'après le principe d'interaction, la masse k applique la force $-\vec{F}_{el,k}$ au satellite.

Donc
$$\vec{F}_s = \underbrace{m_G^{(s)} \vec{g}(O_s)}_{\text{force gravitationnelle exercée par la Terre}} - \vec{F}_{el,1} - \vec{F}_{el,2}$$

(42)
$$m_I^{(1)} \frac{d^2 \vec{OO}_1}{dt^2} = m_G^{(1)} \vec{g}(O_1) + \vec{F}_{el,1}$$

$$m_I^{(2)} \frac{d^2 \vec{OO}_2}{dt^2} = m_G^{(2)} \vec{g}(O_2) + \vec{F}_{el,2}$$

$$m_I^{(s)} \frac{d^2 \vec{OO}_s}{dt^2} = m_G^{(s)} \vec{g}(O_s) - \vec{F}_{el,1} - \vec{F}_{el,2}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 \vec{O}_1}{dt^2} = \frac{m_G^{(1)}}{m_I^{(1)}} \vec{g}(O_1) + \frac{1}{m_I^{(1)}} \vec{f}_{el,1} \\ \frac{d^2 \vec{O}_2}{dt^2} = \frac{m_G^{(2)}}{m_I^{(2)}} \vec{g}(O_2) - \frac{\vec{f}_{el,1}}{m_I^{(2)}} - \frac{\vec{f}_{el,2}}{m_I^{(2)}} \end{cases}$$

en soustrayant :

$$\frac{d^2 \vec{O}_1}{dt^2} = \frac{m_G^{(1)}}{m_I^{(1)}} \vec{g}(O_1) - \frac{m_G^{(2)}}{m_I^{(2)}} \vec{g}(O_2) + \frac{1}{m_I^{(1)}} \vec{f}_{el,1} + \frac{1}{m_I^{(2)}} (\vec{f}_{el,1} + \vec{f}_{el,2})$$

et de même

$$\frac{d^2 \vec{O}_2}{dt^2} = \frac{m_G^{(2)}}{m_I^{(2)}} \vec{g}(O_2) - \frac{m_G^{(1)}}{m_I^{(1)}} \vec{g}(O_1) + \frac{1}{m_I^{(2)}} \vec{f}_{el,2} + \frac{1}{m_I^{(1)}} (\vec{f}_{el,1} + \vec{f}_{el,2})$$

(43) $\frac{d^2 \vec{O}_1}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{O}_2}{dt^2} = \vec{0}$ et on soustrait les 2 équations précédentes :

$$\frac{m_G^{(2)}}{m_I^{(2)}} \vec{g}(O_2) - \frac{m_G^{(1)}}{m_I^{(1)}} \vec{g}(O_1) + \underbrace{\frac{\vec{f}_{el,2}}{m_I^{(2)}} - \frac{\vec{f}_{el,1}}{m_I^{(1)}}}_{= -\delta \vec{P}} = 0$$

$$\text{D'où } \delta \vec{P} = \frac{m_G^{(2)}}{m_I^{(2)}} \vec{g}(O_2) - \frac{m_G^{(1)}}{m_I^{(1)}} \vec{g}(O_1)$$

$$= \frac{m_G^{(2)}}{m_I^{(2)}} (\vec{g}(O_2) + \vec{g}(O_2) - \vec{g}(O_2)) - \frac{m_G^{(1)}}{m_I^{(1)}} (\vec{g}(O_2) + \vec{g}(O_1) - \vec{g}(O_2))$$

$$= \underbrace{\frac{g}{2,1}}_{\approx 1} \vec{g}(O_2) + (1 + \eta_2) (\vec{g}(O_2) - \vec{g}(O_2)) - \underbrace{(1 + \eta_1)}_{\approx 1} (\vec{g}(O_1) - \vec{g}(O_2))$$

car $|\eta_2| \ll 1$ car $|\eta_1| \ll 1$

$$\text{Donc } \delta \vec{P} \approx \frac{g}{2,1} \vec{g}(O_2) + \vec{g}(O_2) - \vec{g}(O_1)$$

(44) * une violation du principe d'équivalence viendrait du 1^{er} terme de l'expression précédente, et la variation temporelle de ce terme vient de la variation temporelle

$$\text{de } \vec{g}(O_2) = - \frac{g m_G^{(T)}}{r_2^3} \vec{x}_2(t)$$

$$\text{or } \begin{cases} x_2(t) = r_2 \cos \Omega_2 t \\ y_2 = 0 \\ z_2(t) = -r_2 \sin \Omega_2 t \end{cases}$$

compte-tenu des conventions de la figure 2

donc $g_x(O_2)$ oscille à la pulsation Ω_2 ,

et $\delta \vec{P}_x$ aussi si $\frac{g}{2,1} \neq 0$

$$(45) \quad g_z = - \frac{g_y m_G^{(T)}}{r^3} z = - g_y m_G^{(T)} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\text{grad} g_z \begin{cases} \frac{\partial g_z}{\partial x} = - g_y m_G^{(T)} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{z} \frac{z x x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right) = - \frac{g_y m_G^{(T)}}{r^3} \left(1 - \frac{3x^2}{r^2} \right) \\ \frac{\partial g_z}{\partial y} = - g_y m_G^{(T)} \frac{x \left(-\frac{3}{z}\right) 2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{g_y m_G^{(T)}}{r^3} \frac{3xy}{r^2} \\ \frac{\partial g_z}{\partial z} = - g_y m_G^{(T)} \frac{z \left(-\frac{3}{z}\right) 2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{g_y m_G^{(T)}}{r^3} \frac{3xz}{r^2} \end{cases}$$

* on calcule $\text{grad} g_z(O_A) = - \frac{g_y m_G^{(T)}}{r_A^3} (1 - 3 \cos^2 \Omega_A t) \vec{e}_x - \frac{g_y m_G^{(T)}}{r_A^3} 3 \cos \Omega_A t \sin \Omega_A t \vec{e}_y$

* $1 - 3 \cos^2 \Omega_A t = 1 - 3 \left(\frac{1 + \cos 2\Omega_A t}{2} \right) = - \frac{1 + 3 \cos 2\Omega_A t}{2}$

Donc si $\vec{O}_1 O_2 = x_0 \vec{e}_x + y_0 \vec{e}_y + z_0 \vec{e}_z$, $g_z(O_2) - g_z(O_1) = \text{grad}$

$$g_z(O_2) - g_z(O_1) = - \frac{g_y m_G^{(T)}}{r_A^3} \left[-x_0 \frac{1 + 3 \cos(2\Omega_A t)}{2} - z_0 \frac{\sin(2\Omega_A t)}{2} \right]$$

$$g_z(O_2) - g_z(O_1) = \frac{g_y m_G^{(T)}}{2 r_A^3} \left(x_0 (1 + 3 \cos(2\Omega_A t)) + z_0 \sin(2\Omega_A t) \right)$$

avec $x_0 = \vec{O}_1 O_2 \cdot \vec{e}_x$ et $z_0 = \vec{O}_1 O_2 \cdot \vec{e}_z$

* ce terme de $\delta \Gamma_z$ varie à la pulsation $2\Omega_A \neq \Omega_{PE}$.

* le défaut d'alignement ne peut pas être confondu avec le signal de violation du principe d'équivalence, puisqu'ils ne varient pas à la même fréquence. C'est tout l'intérêt de l'analyse spectrale du signal.

(46) Ce sont les incertitudes de répétabilité (type A).

(47) Les résultats sont presque tous au dessus des erreurs systématiques estimées, ils ne sont donc pas dus à une erreur systématique de mesure.

(48) $\frac{g(PE, PE)}{m_I^{(PE)}} = \frac{m_G^{(PE)}}{m_I^{(PE)}} - \frac{m_G^{(PE)}}{m_I^{(PE)}} = 0$ que le principe d'équivalence soit vérifié ou pas.

(49) $\frac{g(PE, PE)}{m_I^{(PE)}} = [+4 \pm 4] 10^{-15}$ signifie que $0 \leq \frac{g(PE, PE)}{m_I^{(PE)}} \leq 8 \cdot 10^{-15}$; le fait que la valeur 0 se trouve dans l'intervalle de confiance valide la méthode.

$\frac{g(PE, Ti)}{m_I^{(PE)}} = [-1 \pm 9 \pm 9] 10^{-15} \Leftrightarrow -19 \cdot 10^{-15} \leq \frac{g(PE, Ti)}{m_I^{(PE)}} \leq 17 \cdot 10^{-15}$ 0 est dans l'intervalle de confiance

Donc le principe d'équivalence n'est pas invalidé

(50) Compte-tenu de l'incertitude, le test du principe d'équivalence se fait à $2 \cdot 10^{-14}$ près; l'objectif de la mission (10^{-15} près) n'est donc pas encore atteint avec les données déjà analysées.