DS n°2 - Sujet CCINP - e3a
Samedi 21 octobre 2023 - Durée 4h

I Résolution de problème : la centrifugeuse

La centrifugeuse est un type de manège constitué d'un cylindre vertical tournant autour de son axe. Les passagers du manège s'appuient sur la paroi intérieure du cylindre, recouverte de caoutchouc. Au-delà d'une certaine vitesse angulaire, les passagers sont "collés" sur la paroi du cylindre ; plus besoin de sol, ils peuvent se mettre dans n'importe quelle position !

En utilisant des ordres de grandeurs qui vous semblent appropriés pour les différents paramètres du problème, estimer l'ordre de grandeur de la vitesse de rotation du cylindre nécessaire.

****

II Sécurité routière

Ce problème s'intéresse à quelques aspects de la sécurité routière. Il étudie la distance de freinage en fonction de l'état de la chaussée puis analyse le principe du relèvement d'un virage et les risques liés à la suspension d'un objet dans l'habitacle à proximité du conducteur.

Les parties A et B sont fortement liées. En revanche les sous-parties C et D sont indépendantes l'une par rapport à l'autre ainsi que des sous-parties A et B.

Dans tout le problème, on considérera que l'accélération de pesanteur vaut $g = 10$ m.s^{-2}.

A. Distance nécessaire pour s'arrêter sur une ligne droite horizontale

La sécurité routière insiste fortement sur le respect de distances minimales entre les véhicules afin qu'en cas d'incident imprévu, tout véhicule puisse s'arrêter sans danger.

DOCUMENT 1 : "Distance de sécurité", article extrait du site de l'Association de Prévention Routière http ://www.preventionroutiere.asso.fr

Sur autoroute, près des deux tiers des conducteurs ne respectent pas la distance de sécurité entre leur voiture et le véhicule qui les précède. Garder ses distances avec le véhicule que l'on suit est pourtant le meilleur moyen d'éviter une collision ou pire un carambolage.
La distance d'arrêt d'un véhicule correspond à la distance parcourue pendant le temps de réaction de son conducteur à laquelle s'ajoute la distance de freinage.

- *Temps de réaction noté t_R : on évalue à une seconde le temps minimum nécessaire pour que le conducteur réagisse en cas d'incident ou d'apparition d'un obstacle et ce, dans les meilleures conditions. Pendant ce temps-là, le véhicule continue sa course. Ce n'est qu'une fois l'information assimilée que le conducteur commence vraiment à freiner.*
- *Distance de freinage : sa longueur varie en fonction de la vitesse du véhicule, de l'efficacité du système de freinage, de la pente, ...*

Le Code de la Route a fixé une règle claire : l'intervalle de sécurité à ménager entre vous et le véhicule qui vous précède est au moins la distance que vous parcourez en 2 secondes. Plus votre vitesse est élevée, plus cette distance doit être grande.
Pour les véhicules lourds (PTAC$>3,5$ t) ou ceux dont la longueur dépasse 7 mètres, les ensembles de véhicules (voiture + caravane) et les camping-cars, cette distance est d'au moins 50 mètres.

Comment évaluer la bonne distance de sécurité ? Prenez un point de repère visuel sur le bord de la route comme un arbre ou un panneau de signalisation. Une fois que le véhicule qui vous précède est passé à sa hauteur, comptez 2 secondes. Si votre véhicule passe ce repère avant ce délai, vous êtes trop près.
Autre astuce : sur autouroute, les lignes délimitant la bande d'arrêt d'urgence mesurent 39 mètres et sont espacées entre elles de 13 mètres. A 130 km.h^{-1}, vous devez au moins laisser un intervalle de 2 traits soit environ 90 mètres pour arrêter votre véhicule sans percuter celui qui vous précède.

On considère un véhicule roulant sur une route rectiligne horizontale Ox à la vitesse v_0 prise égale pour l'instant à 130 km.h^{-1} avec un mouvement uniforme. On notera $\overrightarrow{e_x}$ le vecteur unitaire de l'axe Ox dans le sens du déplacement.

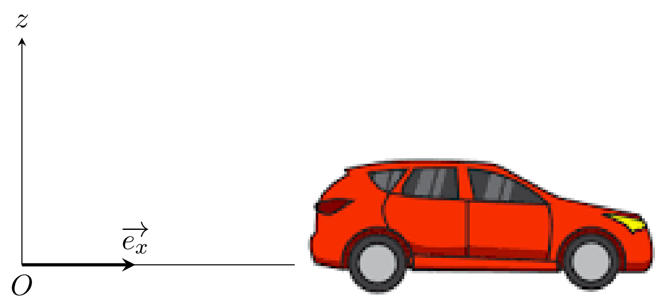

FIGURE 1 – Véhicule sur une route horizontale.

On prendra l'origine des temps à l'instant où un obstacle a surgi et celle de l'espace à la position initiale pour $t = 0$. Pour les applications numériques, on prendra $t_R = 1{,}0$ s.

A.1. Rappeler la définition d'un mouvement rectiligne puis d'un mouvement uniforme.

A.2. Lorsqu'un obstacle sur la voie apparaît au conducteur, la première phase du mouvement vers l'immobilisation correspond au temps de réaction t_R. Que peut-on dire de la nature du mouvement au cours de cette phase ? En déduire l'expression de la vitesse au cours du temps pour cette phase.

A.3. La seconde correspond au freinage proprement dit. Par souci de simplification, on considère que le freinage consiste à imposer une décélération a_0 constante. Si on suppose que $a_0 > 0$, donner l'expression la position $x(t)$ du véhicule en fonction du temps.

A.4. Déterminer l'instant t_1 pour lequel le véhicule s'arrête. En déduire la distance d'arrêt d_a en fonction de v_0, a_0 et t_R.

A.5. Exprimer puis calculer la valeur minimale de la décélération permettant d'utiliser les lignes de la bande d'arrêt d'urgence pour évaluer la distance de sécurité c'est-à-dire pour que la distance d'arrêt soit inférieure à la distance D des deux lignes de la bande d'arrêt d'urgence.

A.6. Pour une valeur de décélération $a_0 = 12$ m.s^{-2}, comparer les temps d'arrêt et les distances d'arrêt pour des vitesses respectivement de 90 et 130 km.h^{-1}. Les résultats sont-ils logiques ?

A.7. Pour déterminer la validité de la règle préconisée par le Code de la Route de maintenir une distance par rapport au véhicule devant soi correspondant à la distance parcourue en 2,0 s, calculer la décélération a_2 qui permettrait un arrêt du véhicule à l'instant $t_2 = 2,0$ s. Retrouve-t-on la même distance d'arrêt qu'avec la technique précédente pour une vitesse initiale de 130 km.h^{-1} ? Que peut-on en conclure ?

B. Influence de l'état de la route sur la distance d'arrêt

DOCUMENT 2 : Quelques coefficients de frottement dynamique

matériaux	*coefficient de frottement dynamique* λ
acier sur glace	*0,050*
acier sur acier	*0,40*
verre sur verre	*0,40*
pneu sur béton sec	*0,70*
pneu sur béton mouillé	*0,50*
semelle de cuir sur bois	*0,20*
semelle de cuir sur tapis	*0,50*

On considère dans un premier temps que la route est en béton, rectiligne et horizontale. Le véhicule de masse $m = 1000$ kg est assimilé à un point matériel avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_x}$. À l'instant $t_R = 1{,}0$ s le conducteur appuie fortement sur le frein, ce qui a pour effet de bloquer les quatre roues, provoquant le glissement du véhicule sur la route.

B.1. Rappeler les lois du frottement de Coulomb. On notera $\overrightarrow{R_N}$ et $\overrightarrow{R_T}$ respectivement les composantes normale et tangentielle de la réaction en notant λ le coefficient de frottement dynamique.

B.2. Déterminer les expressions de $\overrightarrow{R_N}$ et de $\overrightarrow{R_T}$ pour $t \geqslant t_R$.

B.3. Déterminer l'instant t_1 où le véhicule s'arrête ainsi que la distance d'arrêt d_a.

Application numérique : calculer d_a pour $v_0 = 50$ km.h^{-1} sur une route sèche et sur une route mouillée. Reprendre le calcul si $v_0 = 90$ km.h^{-1}.

B.4. On s'intéresse à la situation où le véhicule descend sur une route inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. La vitesse initiale est toujours v_0 et le conducteur freine et bloque les roues à l'instant $t_R = 1{,}0$ s.

À quelle condition liant α et λ le véhicule peut-il s'arrêter ? Si on suppose que le pente est égale à 20% (elle descend de 20 m pour 100 m horizontaux), cette condition est-elle réalisée dans le cas où la route est sèche ? Dans le cas où elle est mouillée ?

B.5. Établir la nouvelle distance d'arrêt d_a en fonction de v_0, t_R, α, m, g et λ. Application numérique : calculer d_a pour $v_0 = 50$ km.h^{-1} puis pour $v_0 = 90$ km.h^{-1} dans le cas d'une route mouillée ayant une pente de 20%.

C. Relèvement d'un virage

Dans toute cette partie, le véhicule de masse $m = 1000$ kg roule sans glisser sur une route sèche et horizontale mais qui n'est plus rectiligne. On la modélise par deux arcs de cercle horizontal de centre O (figure 2). Le véhicule aborde ce virage avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_y}$ en $\theta = 0$; pour l'application du principe fondamental de la dynamique on pourra supposer que le véhicule est réduit à un point (il s'agit en fait de son centre d'inertie) décrivant un arc de cercle de rayon R.

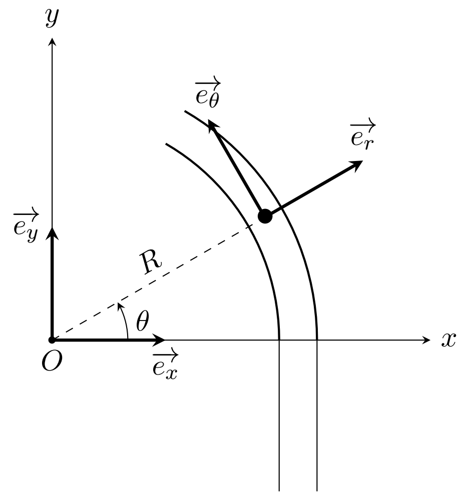

FIGURE 2 – Virage en arc de cercle.

C.1. Rappeler les expressions de la vitesse et de l'accélération d'un mouvement circulaire dans la base polaire.

C.2. On veut parcourir cette portion de route à vitesse constante v_0. Que peut-on dire de la vitesse angulaire de rotation sur l'arc de cercle ? En déduire l'expression de l'accélération du véhicule en coordonnées cylindro-polaires.

C.3. Montrer qu'il existe forcément une réaction radiale de la route $\overrightarrow{R_{Tr}}$ au cours de ce mouvement. On donnera l'expression de sa norme en fonction de m, v_0 et R.

On admet que pour que le virage soit pris dans de bonnes conditions de sécurité, $\overrightarrow{R_{Tr}}$ doit vérifier l'inégalité : $\|\overrightarrow{R_{Tr}}\| < \lambda\,\|\overrightarrow{R_N}\|$, où λ est le coefficient de frottement pneus-route.

C.5. Montrer que pour qu'il en soit ainsi, la vitesse ne doit pas dépasser une valeur maximale $v_{\max}$ qu'on exprimera en fonction de λ, g et R. Donner sa valeur numérique sur route sèche avec $R = 50$ m.

C.6. Si le virage se fait sur une route verglacée, que peut-on dire de la vitesse maximale avec laquelle on peut aborder le virage ?

Pour améliorer le contact pneu - route, on relève le virage (toujours circulaire) d'un angle β (figure 3). La valeur de β est obtenue en cherchant à annuler l'accélération verticale. Dans les questions qui suivent on suppose que le contact pneu - route est sans frottement. On suppose toujours que la norme de la vitesse du véhicule est constante, de valeur v_0.

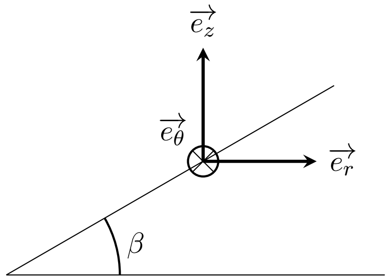

FIGURE 3 – Relèvement du virage.

C.7. Déterminer l'expression de la norme de la réaction normale $\overrightarrow{R_N}$ en fonction de m, g et β.

C.8. En déduire la relation entre la vitesse v_0 dans le virage, g, R et β. Donner la valeur de v_0 pour $\beta = 20°$ et $R = 50$ m.

C.9. Calculer la valeur de β pour retrouver la vitesse $v_{\max}$ obtenue précédemment en C.5.

C.10. La valeur de β est ajustée pour une vitesse $v_{\text{réf}}$ donnée. Que se passe-t-il lorsque la vitesse v_0 est plus faible ? plus grande ? On fera des schémas clairs pour justifier la réponse.

D. Danger lié à un pendule suspendu dans un véhicule

Certains conducteurs aiment suspendre des objets à proximité de leur rétroviseur intérieur comme des porte-bonheur ou des diffuseurs solides de parfum. On se propose de s'intéresser aux dangers associés à cette pratique.

Pour simplifier l'étude, on considère que l'objet est un point M de masse m_0 suspendue à un fil inextensible, de masse négligeable devant m_0 et de longueur ℓ dont l'autre extrémité est attachée au rétroviseur (figure 4). On suppose que la voiture roule en ligne droite à vitesse constante $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_x}$ quand surgit un obstacle sur la route à l'instant $t = 0$. Le conducteur freine brutalement avec une décélération constante $\overrightarrow{a} = -a_0\,\overrightarrow{e_x}$ à partir de $t = 0$ (on néglige donc le temps de réaction t_R dans tout ce qui suit).

Le point de suspension O du fil est situé sur le pare-brise, ce dernier étant incliné d'un angle $\alpha = 15°$ par rapport à la verticale.

D.1. Pour déterminer si la masse m_0 risque de heurter le conducteur ou le pare-brise, dans quel référentiel est-il préférable d'étudier le mouvement ? Discuter.

D.2. On considère que le référentiel terrestre est galiléen. Le référentiel lié à la voiture est-il galiléen ? La réponse diffère-t-elle en fonction de la phase du mouvement du véhicule ?

Dans toute la suite on se place dans le référentiel du véhicule.

D.3. Déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit la position angulaire $\beta(t)$ de l'objet suspendu lors de la phase de freinage.

On se place désormais dans l'approximation des petits mouvements autour de $\beta = 0$.

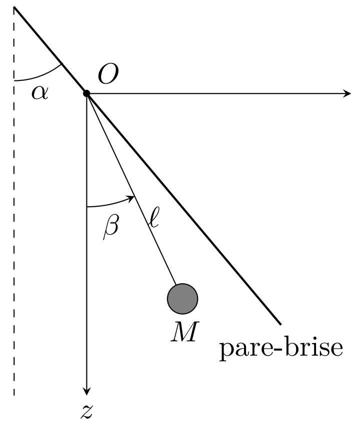

FIGURE 4 – Pendule suspendu au pare-brise d'une voiture.

D.4. Établir l'expression de l'équation horaire $\beta(t)$ en supposant qu'initialement le pendule est immobile et vertical.

D.5. Déterminer la valeur maximale $a_{\max}$ de a_0 pour que l'objet ne heurte pas le pare-brise. Commenter.

D.6. On veut montrer que le mouvement de M est plan. Les conditions initiales sont : pendule vertical à $t = 0$, sans vitesse initiale dans le référentiel du véhicule.

On introduit un pas de temps Δt et on pose $t_n = n\,\Delta t$, $n \in \mathbb{N}$. On adopte les notations suivantes :

$$M_n = M(t_n) \quad \text{et } \vec{v}_n = \vec{v}(t_n)$$

On suppose de plus que Δt est suffisamment petit pour permettre de remplacer les dérivées par les taux d'acroissement :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{v}_{n+1} - \vec{v}_n}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\overrightarrow{OM_{n+1}} - \overrightarrow{OM_n}}{\Delta t}$$

a) Établir l'épression de la tension $\vec{T}$ exercée par le fil à l'instant $t \geqslant 0$ en fonction de $T(t) = \|\vec{T}\|$, $\overrightarrow{OM}$ et ℓ.

b) Montrer que le principe fondamental de la dynamique conduit à une relation de récurrrence donnant $\vec{v}_{n+1}$ en fonction de $\vec{v}_n$, $T_n = T(t_n)$, $\overrightarrow{OM_n}$, ℓ, $\vec{g}$, $\vec{a}$, Δt et m_0.

c) D'autre part, la définition de la vitesse du point M conduit à la relation (qu'on ne demande pas de démontrer) :

$$\overrightarrow{OM_{n+1}} = \overrightarrow{OM_n} + \vec{v}_n\,\Delta t$$

Montrer à partir de cette relation et de celle de la question $D.6.b$) que le mouvement du pendule sera nécessairement plan pour $t \geqslant 0$. Quel est ce plan ?

****

III Le soleil a rendez-vous avec la pluie

Ce sujet traite des gouttes d'eau. Il est constitué de 3 parties qui peuvent être résolues de manière totalement indépendantes les unes des autres.

Dans les **parties 1 et 2** (mécanique du point), on s'intéresse d'abord à la vitesse limite de chute des gouttes de pluie et à la mesure de leurs diamètres, puis dans la **partie 3**, à la répartition (distribution) de ces diamètres dans une averse.

Dans tout le sujet, on suppose les gouttes d'eau sphériques. L'ordre de grandeur de leur diamètre, noté D, est le millimètre.

1) Vitesse des gouttes de pluie

On s'intéresse à la chute dans l'air d'une goutte d'eau de diamètre D et de masse volumique $\rho = 1{,}0 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. On prendra pour l'air une masse volumique égale à $\rho_a = 1{,}3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. L'axe Oz est vertical descendant. L'accélération de la pesanteur vaut $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{e_z}$, avec $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Q1. Définir « référentiel galiléen ». Définir et exprimer le poids d'une goutte d'eau.

Q2. On admet que la seule autre force mise en jeu est la force de frottement, due à l'air, proportionnelle au carré de la vitesse v de la goutte. Elle s'écrit :

$$\overrightarrow{F_{\text{frott}}} = -C\pi\rho_a D^2 v^2 \overrightarrow{e_z} \quad \text{avec} \quad C = 6{,}0 \times 10^{-2}$$

Vérifier l'homogénéité de cette formule.

Q3. En appliquant la seconde loi de Newton à la goutte dans le référentiel terrestre, montrer que sa vitesse limite, donc indépendante du temps, s'écrit :

$$\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\overrightarrow{e_z}$$

où K est un coefficient à exprimer en fonction de ρ, ρ_a, C et g.

Calculer la vitesse limite pour des diamètres égaux à 1 mm, 3 mm et 5 mm.

Gunn et Kinzer ont mesuré en 1949 avec précision des vitesses limites de gouttes de différents diamètres. Les résultats de leurs mesures avec les barres d'incertitudes sont reportés sur la figure 5 en trait plein ainsi que la représentation de la relation obtenue en **Q3** en traits pointillés.

Q4. Pour quelle(s) raison(s) le modèle théorique élaboré aux question **Q1** à **Q3** n'est-il pas validé pour toutes les tailles de gouttes ?

Selon les précipitations, la taille des gouttes de pluie est très variable. La distribution des tailles de goutte, qui renseigne sur les évènement météorologiques, doit souvent être mesurée. On utilise pour cela un disdromètre (*Distribution of Drops Meter*).

2) Disdromètre à impact avec platine

On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre D qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation :

$$\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\overrightarrow{e_z} \quad \text{avec} \quad K = 150\ \mathrm{m^{1/2} \cdot s^{-1}}$$

Il existe deux types de disdromètres : le plus ancien est le distromètre à impact (photo 6).

Il se compose d'une platine sensible recevant les gouttes de pluie de masse $m(D)$ ayant atteint leur vitesse limite et d'un système de traitement permettant la mesure de celle-ci.

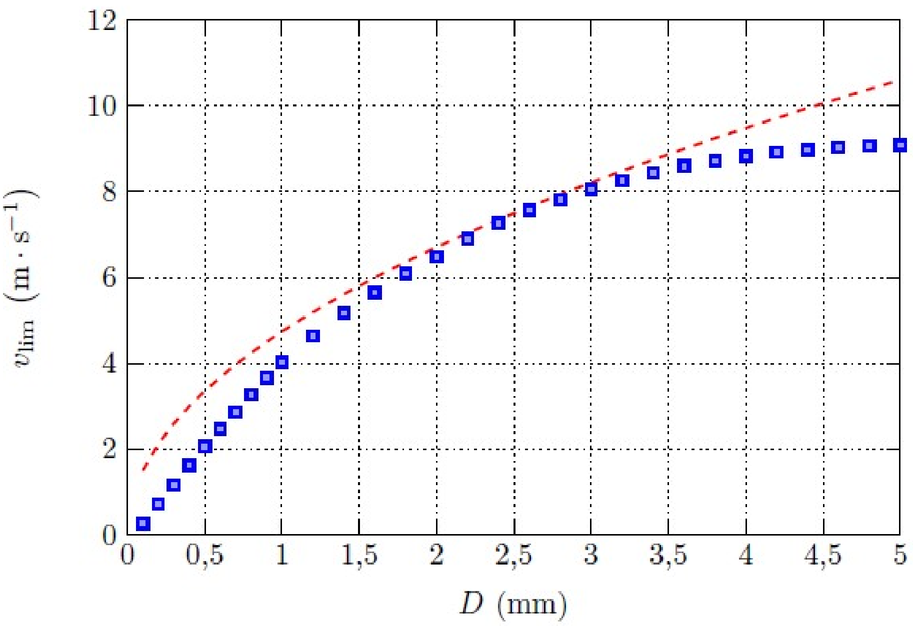

FIGURE 5 – Influence du diamètre des gouttes sur la vitesse limite.

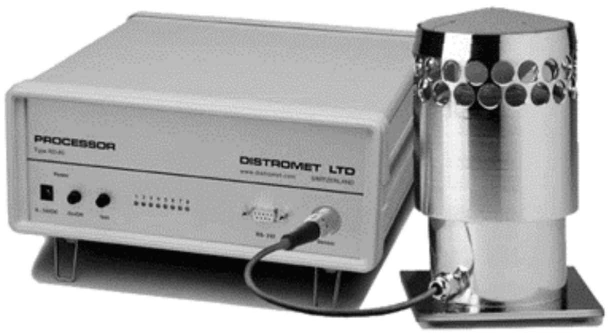

FIGURE 6 – Disdromètre Joss-Waltvogel.

On modélise la platine par un disque plan horizontal, de rayon R et de masse M, relié à un support fixe par l'intermédiaire d'une suspension, modélisée par un système masse-ressort amorti.

On note k la raideur du ressort liant la platine au support, ℓ_0 sa longueur à vide et λ le coefficient de frottement traduisant l'amortissement du disque : la force de frottement, qui s'oppose à la vitesse de la platine, s'écrit donc $\overrightarrow{f} = -\lambda\, \overrightarrow{v_{\text{platine}}}$.

La goutte exerce, lors de son impact sur la platine, une force $\overrightarrow{F(t)} = F(t)\overrightarrow{e_z}$ verticale sur celle-ci.

Le référentiel lié au support est supposé galiléen.

Le déplacement de la platine du disdromètre par rapport à sa position d'équilibre est $Z(t)$ (figure 7).

Q5. Exprimer la longueur $\ell_{\text{équ}}$ du ressort à l'équilibre de la platine, sans impact de goutte.

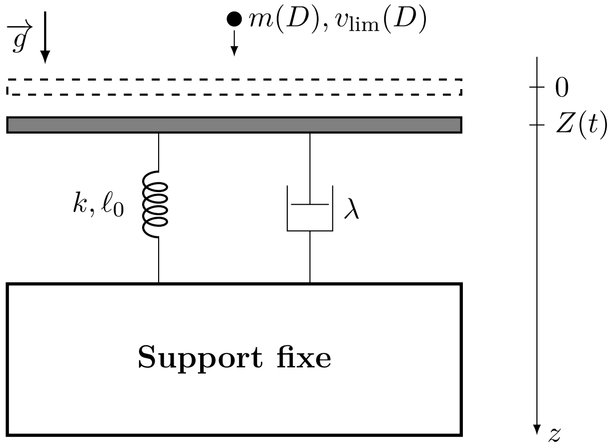

FIGURE 7 – Modélisation du disdromètre à impact à platine.

Q6. Montrer que l'équation liant $Z(t)$ à $F(t)$ est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z(t)}{\mathrm{d}t^2} + \gamma \frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} + \beta Z(t) = \frac{F(t)}{M}$$

et exprimer les coefficients γ et β en fonction de k, M et de λ.

La force $F(t)$ est modélisée par :

$$\begin{aligned} F = F_0 = m(D)\frac{v_{\text{lim}}(D)}{\tau(D)} \quad &\text{pour} \quad 0 < t < \tau(D) \\ = 0 \quad \text{pour} \quad t > \tau(D) \end{aligned}$$

Q7. Donner la signification physique de $\tau(D)$ et justifier que son ordre de grandeur est :

$$\tau(D) \approx \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}$$

On utilise en pratique un facteur correctif $\xi = 0{,}65$ tel que :

$$\tau(D) = \xi \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}$$

Calculer $\tau(D)$ pour $D = 2{,}5$ mm. Dans la suite on notera ce paramètre plus simplement τ à la place de $\tau(D)$.

Q8. On se place à $0 \leq t \leq \tau$ et on souhaite que la réponse du disdromètre soit la plus rapide possible.

a) Quelle doit être la relation entre les coefficients β et γ ?

On se place désormais dans ce cas.

b) Le système étant à l'équilibre avant la chute de la goutte, montrer que la réponse du disdromètre s'écrit alors pour $0 \leq t \leq \tau$:

$$Z(t) = \frac{F_0}{k}\left(1 - \left(1 + \gamma\frac{t}{2}\right)e^{-\gamma t/2}\right)$$

c) Comment choisir γ pour réaliser $Z(\tau) = \frac{F_0}{k}$? Montrer alors que $Z(\tau)$ est proportionnel à D^α et donner la valeur de α.

d) Tracer l'allure de $Z(t)$ pour $0 \leq t \leq 2\tau$.

e) Comment la mesure de $Z(t)$ permet-elle de connaître D ?

Les questions Q9. à Q12. ne seront pas abordées dans ce devoir.

3) Dimensionnement et étalonnage du disdromètre à impact

On considère tout d'abord une averse dont toutes les gouttes ont le même diamètre D, tombent à la vitesse $v_{\text{lim}}(D)$ et sont réparties en volume de manière homogène avec une densité volumique N.

On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre D qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation : $\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\overrightarrow{e_z}$ avec $K = 150\ \text{m}^{1/2}\cdot\text{s}^{-1}$ et que la durée de l'impact est :

$$\tau(D) = \xi \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)} \quad \text{avec} \quad \xi = 0{,}65$$

Q13. Exprimer le nombre de gouttes G tombant sur la surface S du disdromètre pendant la durée τ d'un impact, en fonction de N, S, D et de ξ. En déduire l'expression de la surface maximale S_{max} du capteur du disdromètre permettant d'éviter des chevauchements du signal dus à deux impacts successifs.

Dans une averse, on trouve en fait plusieurs tailles de gouttes. La distribution des tailles de gouttes est caractérisée par la valeur $n(D)$, telle que le nombre de gouttes de pluie par unité de volume, de diamètre compris entre D et $D + \text{d}D$ s'écrit : $\text{d}N = n(D)\text{d}D$.

Une distribution empirique très utilisée est celle de Marshall et Palmer :

$$n(D) = n_0 \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) \quad \text{avec} \quad n_0 = 8{,}0 \times 10^3\ \text{m}^{-3}\cdot\text{mm}^{-1}$$

Q14. On considère une averse contenant toutes les tailles de gouttes, répondant à la distribution de Marshall et Palmer. Montrer que D_0 représente le diamètre moyen des gouttes.
On donne :

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\text{d}x = 1$$

Q15. Exprimer pour la distribution de Marshall et Palmer le nombre de gouttes G tombant sur la surface S du disdromètre pendant une durée τ.
En déduire une seconde expression de S_{max}. En pratique, le constructeur applique une marge. On prend librement la valeur $\xi = 6{,}5$. Calculer S_{max} numériquement pour $D_0 =$ 1,5 mm et commenter au regard de la photo **??**.

On peut étalonner le disdromètre à l'aide d'un pluviomètre : c'est un simple récipient cylindrique gradué recueillant l'eau de pluie (photo 8). Il ne permet pas de mesurer $n(D)$, mais seulement l'intensité R de l'averse.

Cette intensité R est définie comme la hauteur d'eau tombant au sol par unité de temps. Elle est donnée en pratique en $\text{mm}\cdot\text{h}^{-1}$. Il suffit donc de graduer le pluviomètre pour lire la hauteur d'eau après une durée définie et calculer l'intensité R.

Q16. On considère tout d'abord une averse dont toutes les gouttes ont le même diamètre D_0, tombant à la vitesse $v_{\text{lim}}(D_0)$ et réparties en volume de manière homogène avec une densité volumique N.
Exprimer l'intensité R de cette averse en fonction de N, D_0 et de $v_{\text{lim}}(D_0)$.

Q17. Justifier que R s'exprime de manière générale par :

$$R = \int_0^{+\infty} n(D)v_{\text{lim}}(D)\frac{\pi D^3}{6}\text{d}D$$

et calculer R. On donne :

$$\int_0^{+\infty} x^{3,5}e^{-x}\text{d}x = \frac{105\sqrt{\pi}}{16} \approx 11{,}6$$

Faire l'application numérique en $\text{mm}\cdot\text{h}^{-1}$ pour $D_0 = 1{,}5$ mm.

FIGURE 8 – Pluviomètre.

En général, le disdromètre sépare les gouttes en « classes » : à chaque classe correspond un diamètre D moyen et une « largeur » δD en diamètre. Cela signifie qu'appartiennent à la même classe toutes les gouttes dont le diamètre est compris dans l'intervalle $\left[D - \frac{\delta D}{2}, D + \frac{\delta D}{2}\right]$.

On donne (figure 9) l'histogramme obtenu après une mesure sur une durée de 24 heures avec un disdromètre de surface $S = 80\ \text{cm}^2$.

Cet histogramme donne le nombre de gouttes mesuré pour chaque classe, de largeur en diamètre variable :

— $\delta D = 0{,}1$ mm pour 0 mm $< D \leq 1$ mm,

— $\delta D = 0{,}2$ mm pour 1 mm $< D \leq 2$ mm,

— $\delta D = 0{,}4$ mm pour $D > 2$ mm.

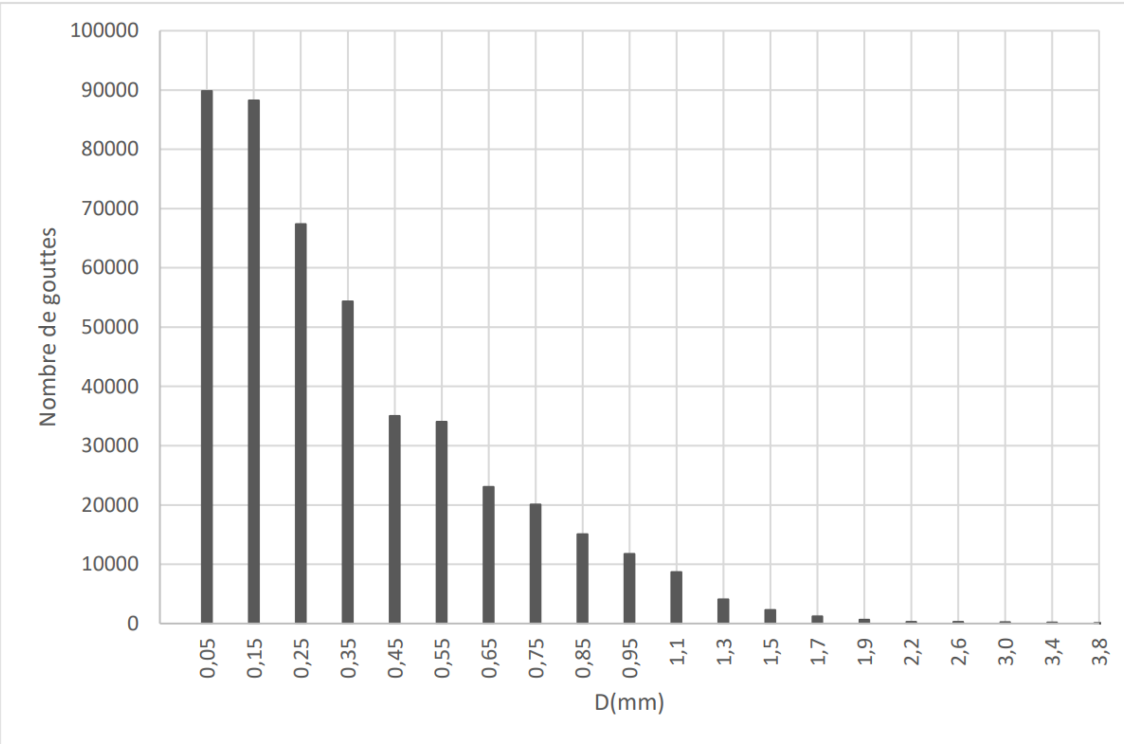

FIGURE 9 – Résultats d'une mesure sur une durée de 24 heures.

Q18. Expliquer comment il est possible de calculer R à l'aide de ces données (le calcul n'est pas demandé).

FIN DU SUJET