

Corrigé du DS n°2 - Sujet CCINP - e3a

I Résolution de problème : la centrifugeuse

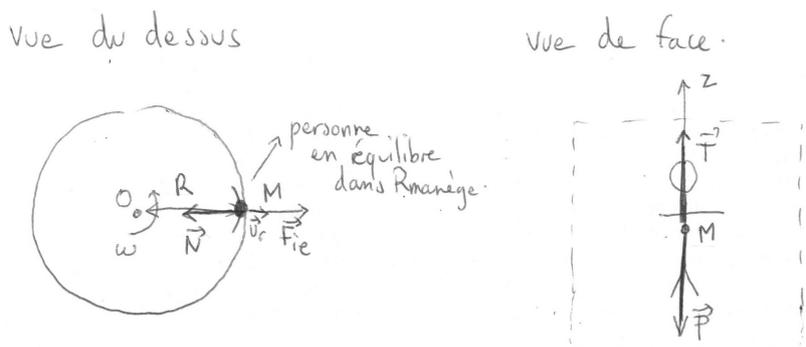
C'est la force centrifuge qui plaque les personnes sur le mur dans le référentiel du manège. Ceux-ci restent en équilibre dans la mesure où ils ne glissent pas vers le bas sur le caoutchouc.

Déterminons les conditions nécessaires sur la vitesse angulaire du manège afin que cela soit possible.

Un passager de masse m semble immobile dans le référentiel du manège $\mathcal{R}_{\text{manège}}$ non galiléen, donc (la force d'inertie de Coriolis est nulle à l'équilibre relatif) :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_{ie}$$

où \vec{T} est la force de frottement entre le dos des personnes et le caoutchouc de l'intérieur du cylindre, qui s'oppose au glissement des personnes vers le bas, avec $\vec{T} = T\vec{u}_z$, et $T > 0$ (cf figure ci-dessous).



En projection sur \vec{u}_r , on obtient : $0 = -N + mR\omega^2$, où R est le rayon du cylindre, et ω sa vitesse angulaire de rotation.

En projection sur \vec{u}_z , on obtient : $0 = T - mg$.

Or, d'après les lois de Coulomb, en notant f_s le coefficient de frottement statique entre le dos des personnes et le cylindre, la condition de non-glissement s'écrit :

$$\|\vec{T}\| < f_s \|\vec{N}\| \quad \text{soit} \quad mg < f_s m R \omega^2 \Rightarrow \omega > \sqrt{\frac{g}{f_s R}}$$

AN : avec $r \simeq 2$ m, $g \simeq 10$ m.s⁻² et $f_s \simeq 0,5$, on obtient : $\omega > \sqrt{10}$ rad.s⁻¹ $\simeq 0,5$ tour.s⁻¹. Cela semble être un ordre de grandeur raisonnable : 1 tour toutes les 2 secondes est rapide pour un grand dispositif, mais correspond à une accélération de $R\omega^2 = 2''g''$, ce qui est tout à fait supportable pour une personne normale, qui supporte jusqu'à 10''g'' en accélération horizontale).

En respectant cette condition, il est possible se rester en contact avec le cylindre en ayant la tête en bas, comme sur la gauche de la photo. Cependant, cela n'empêchera pas d'être dans une position très inconfortable car le sang descendra tout de même dans la tête...

L'expression de la vitesse angulaire ne dépend pas de la masse des personnes, et donc les personnes resteront plaquées au mur quelle que soit leur corpulence. En revanche, leurs habits n'ont pas tous les mêmes coefficients de frottement avec le caoutchouc, et il faudra prendre une valeur un peu supérieure à la valeur critique pour que tout le monde reste bien collé sans glisser vers le bas.

II Sécurité routière

A. Distance nécessaire pour s'arrêter sur une ligne droite horizontale

- A.1. Un mouvement est dit *rectiligne* lorsque la trajectoire du point mobile est une portion de droite. Un mouvement est dit *uniforme* lorsqu'il est décrit avec **une norme du vecteur vitesse constante** (mouvement circulaire uniforme par exemple).
- A.2. Il s'agit d'un mouvement rectiligne uniforme avec le vecteur vitesse constant \vec{v}_0 .
- A.3. L'accélération du véhicule s'écrit : $\vec{a} = -a_0 \vec{e}_x$. On sait qu'à l'instant t_R la vitesse est v_0 et la position du véhicule est $x(t_R) = v_0 t_R$. On a donc :

$$\ddot{x} = -a_0 \quad \text{donc} \quad \dot{x}(t) = v(t) = -a_0(t - t_R) + v_0 \quad \text{et donc} \quad \boxed{x(t) = -\frac{a_0(t - t_R)^2}{2} + v_0 t}$$

- A.4. Le véhicule s'arrête à l'instant t_1 vérifiant $v(t_1) = 0$ d'où :

$$\boxed{t_1 = t_R + \frac{v_0}{a_0}}$$

On en déduit que :

$$\boxed{d_a = x(t_1) = v_0 t_R + \frac{v_0^2}{2a_0}}$$

- A.5. On veut $d_a < D$, ce qui impose :

$$\frac{v_0^2}{2a_0} < D - v_0 t_R \iff \boxed{\frac{v_0^2}{2(D - v_0 t_R)} < a_0}$$

A.N. avec $D = 90$ m. $a_{\min} = 12,1$ m.s⁻².

- A.6. On a :

vitesse	t_1 (s)	d_a (m)
$v_0 = 90$ km.h ⁻¹	3	51
$v_0 = 130$ km.h ⁻¹	4	90

La distance et le temps d'arrêt augmentent logiquement, mais ce n'est pas linéaire pour la distance.

- A.7. On veut $v(t_2) = 0$ d'où :

$$\boxed{a_0 = \frac{v_0}{t_2 - t_R} = 36,1 \text{ m.s}^{-2}}$$

ce qui entraîne

$$\boxed{d_a = x(t_2) = -\frac{a_0(t_2 - t_R)^2}{2} + v_0 t_2 \approx 54 \text{ m.s}^{-2}}$$

La distance est donc plus courte, la règle du code de la route est approximative sur autoroute.

B. Influence de l'état de la route sur la distance d'arrêt

B.1. La vitesse de glissement est ici celle du véhicule par rapport à la route, c'est à dire par rapport au référentiel terrestre que nous notons $\vec{v}(t) = v(t) \vec{e}_x$ à l'instant t .

En présence de glissement ($v(t) \neq 0$) on a :

$$\|\vec{R}_T\| = \lambda \|\vec{R}_N\| \quad \text{et} \quad \vec{R}_T \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \vec{R}_T \cdot \vec{v} < 0$$

où λ est le coefficient de frottement dynamique. Cela signifie que \vec{R}_T est de même direction que \vec{v} mais de sens opposé.

B.2. On applique le principe fondamental de la dynamique au véhicule dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m \frac{dv}{dt} \vec{e}_x = \vec{R}_T + \vec{R}_N + m \vec{g}$$

avec $\vec{R}_N = R_N \vec{e}_z$ et $m \vec{g} = -mg \vec{e}_z$. On projette sur \vec{e}_z :

$$R_N - mg = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{R_N = mg}$$

On en déduit que $\|\vec{R}_T\| = \lambda mg$ et comme $v(t) \geq 0$ on en déduit que :

$$\boxed{\vec{R}_T = -\lambda mg \vec{e}_x}$$

B.3. On projette l'équation du principe fondamental sur \vec{e}_x pour trouver :

$$m \frac{dv}{dt} = -\lambda mg \quad \text{d'où} \quad v(t) = \dot{x} = -\lambda g (t - t_R) + v_0$$

et

$$x(t) = -\frac{\lambda g (t - t_R)^2}{2} + v_0 t$$

L'instant t_1 cherché vérifie $v(t_1) = 0$ et on a $d_a = x(t_1)$, ce qui conduit à :

$$\boxed{t_1 = t_R + \frac{v_0}{\lambda g} \quad \text{et} \quad d_a = v_0 t_R + \frac{v_0^2}{2\lambda g}}$$

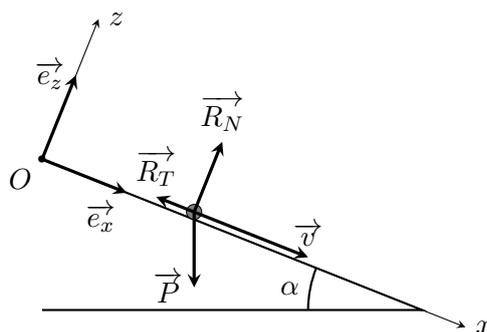
Remarque : on obtient un résultat similaire à celui de la question A.4, ce qui est normal puisque la voiture subit ici aussi une décélération constante, λg jouant le rôle de a_0 .

Application numérique :

$v_0 = 50 \text{ km.h}^{-1}$		
État de la route	λ	d_a (m)
sèche	0,70	28
mouillée	0,50	33

$v_0 = 90 \text{ km.h}^{-1}$		
État de la route	λ	d_a (m)
sèche	0,70	70
mouillée	0,50	88

B.4. On munit le référentiel terrestre du repère $R = (Oxyz)$ selon le schéma suivant :



Le bilan des forces est :

- Poids : $\vec{P} = mg \sin(\alpha) \vec{e}_x - mg \cos(\alpha) \vec{e}_z$
- Réactions : $\vec{R}_N = R_N \vec{e}_z$ et $\vec{R}_T = -R_T \vec{e}_x$ avec $R_T > 0$ car sens opposé à \vec{v}

Le principe fondamental de la dynamique conduit à :

$$m \frac{dv}{dt} \vec{e}_x = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$$

La projection sur \vec{e}_z donne :

$$\boxed{R_N = mg \cos(\alpha) \implies R_T = \lambda mg \cos(\alpha)}$$

Grâce à la projection sur \vec{e}_x on trouve :

$$\frac{dv}{dt} = g [\sin(\alpha) - \lambda \cos(\alpha)]$$

La voiture ne peut s'arrêter que si $\frac{dv}{dt} < 0$, c'est à dire :

$$\sin(\alpha) - \lambda \cos(\alpha) < 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\tan(\alpha) < \lambda}$$

ce qui est cohérent car la pente ne doit pas être trop importante.

Pour une pente de 20% on a $\tan(\alpha) = 20/100 = 0,2$ (donc $\alpha = 11,3^\circ$), ce qui permet l'arrêt du véhicule dans les deux cas : route sèche ou bien mouillée.

B.5. On reprend l'équation de la question précédente on on intègre :

$$v(t) = \dot{x} = g [\sin(\alpha) - \lambda \cos(\alpha)] (t - t_R) + v_0$$

et

$$x(t) = \frac{g [\sin(\alpha) - \lambda \cos(\alpha)] (t - t_R)^2}{2} + v_0 t$$

On en déduit par un calcul similaire à celui des questions précédentes que le temps d'arrêt t_1 et la distance d'arrêt d_a vérifient :

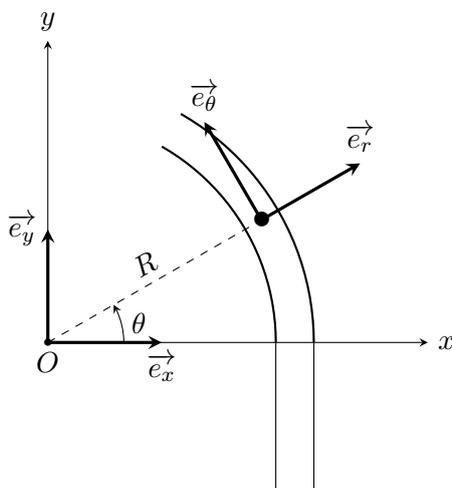
$$t_1 = t_R + \frac{v_0}{g [\lambda \cos(\alpha) - \sin(\alpha)]} \quad \text{et} \quad \boxed{d_a = x(t_1) = v_0 t_R + \frac{v_0^2}{2g [\lambda \cos(\alpha) - \sin(\alpha)]}}$$

A.N. : $\alpha = 11,3^\circ$.

- Pour $v_0 = 50 \text{ km.h}^{-1}$: $d_a = 47 \text{ m}$
- Pour $v_0 = 90 \text{ km.h}^{-1}$: $d_a = 131 \text{ m}$

On obtient naturellement des valeurs supérieures à celles calculées pour une route horizontale.

C. Relèvement d'un virage



C.1. On a :

$$\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

C.2. On doit donc avoir $R\dot{\theta} = v_0$ (le mouvement est donc *circulaire uniforme*). La vitesse angulaire et l'accélération vérifient alors :

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{R} \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\frac{v_0^2}{R} \vec{e}_r$$

C.3. On applique le principe fondamental de la dynamique au véhicule (plus précisément le théorème du centre d'inertie) dans le référentiel terrestre galiléen. Celui-ci est soumis à :

- son poids : $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$.
- Les réactions normale et tangentielle de la route :

$$\vec{R}_N = R_N \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{R}_T = T_r \vec{e}_r + T_\theta \vec{e}_\theta$$

Remarque : \vec{R}_T est dans le plan tangent au support (route) et elle a donc à priori deux composantes T_r et T_θ .

On a donc :

$$-m \frac{v_0^2}{R} \vec{e}_r = R_N \vec{e}_z - mg \vec{e}_z + T_r \vec{e}_r + T_\theta \vec{e}_\theta$$

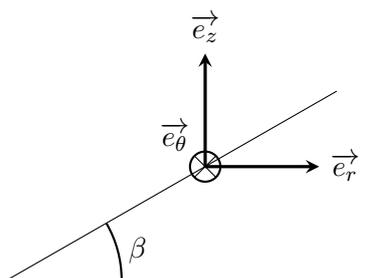
soit :

$$R_N = mg \quad ; \quad T_r = -m \frac{v_0^2}{R} \quad \text{et} \quad T_\theta = 0$$

C.5. On a donc :

$$m \frac{v_0^2}{R} < \lambda mg \quad \text{d'où} \quad v_0 < \sqrt{\lambda g R} = v_{\max}$$

A.N. $R = 50$ m et $\lambda = 0,70$ donne $v_{\max} = 18,7 \text{ m.s}^{-1} = 67 \text{ km.h}^{-1}$ C.6. Dans le cas d'une route verglacée, on peut penser que le contact est sans frottement ce qui revient à poser $\lambda = 0$ (annulation de la composante tangentielle). On a donc dans ce cas $v_{\max} = 0$ ce qui est attendu : on ne peut pas aborder de virage sur une route sans aucun frottement sans glisser.



C.7. On a $R_N = \frac{mg}{\cos \beta}$.

C.8. Le principe fondamental de la dynamique projeté sur \vec{e}_r s'écrit :

$$-m \frac{v_0^2}{R} = -R_N \sin \beta \quad \text{d'où} \quad v_0 = \sqrt{gR \tan \beta}$$

A.N. $v_0 = 13,5 \text{ m.s}^{-1} = 49 \text{ km.h}^{-1}$

C.9. On avait trouvé $v_{\max} = \sqrt{\lambda g R}$. On en déduit que :

$$\tan \beta = \lambda$$

A.N. : pour $\lambda = 0,7$ on trouve $\beta = 35^\circ$.

C.10. Si la valeur de la vitesse est plus faible, le véhicule glisse vers l'intérieur du virage (bas de la pente), donc R diminue et l'accélération augmente jusqu'à l'équilibre. Si la vitesse est trop grande, R augmente et l'accélération diminue.

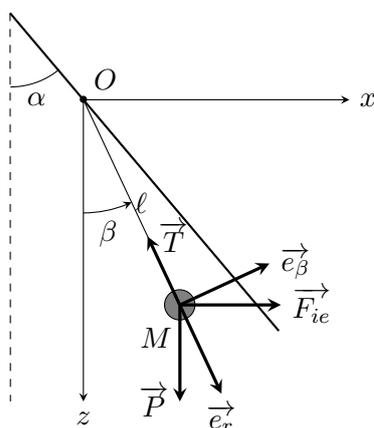
D. Danger lié à un pendule suspendu dans un véhicule

D.1. Il est préférable (bien que non nécessaire) de se placer dans le référentiel de la voiture car le mouvement du fil y est plus simple : mouvement circulaire autour du point fixe O . Cependant ce référentiel risque de ne pas être galiléen.

Au contraire, le référentiel terrestre est supposé galiléen il n'y aura donc pas de forces d'inertie mais le mouvement de M y est plus compliqué (surtout si la voiture accélère ou décélère).

D.2. Cela dépend du mouvement du véhicule :

- Lorsque celui-ci a une vitesse constante \vec{v}_0 , le référentiel du véhicule est galiléen car il est en **translation rectiligne uniforme** par rapport au référentiel terrestre.
- En phase de freinage (ou d'accélération) le référentiel du véhicule n'est plus galiléen.



D.3. Le mouvement étant plan, on travaille dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\beta)$. Dans le référentiel du véhicule, la masse M est soumise à :

- son poids : $\vec{P} = Mg \vec{e}_z = Mg (\cos \beta \vec{e}_r - \sin \beta \vec{e}_\beta)$
- La tension exercée par le fil : $\vec{T} = -T \vec{e}_r$
- La force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = Ma_0 \vec{e}_x = Ma_0 (\cos \beta \vec{e}_r - \sin \beta \vec{e}_\beta)$

L'accélération de M étant : $\vec{a}_M = -\ell \ddot{\beta}^2 \vec{e}_r + \ell \ddot{\beta} \vec{e}_\beta$, le P.F.D. projeté sur \vec{e}_β conduit à :

$$M \ell \ddot{\beta} = -Mg \sin \beta + Ma_0 \cos \beta$$

donc :

$$\ell \ddot{\beta} = -g \sin \beta + a_0 \cos \beta$$

D.4. Dans l'approximation des petits angles on a $\sin \beta \approx \beta$ et $\cos \beta \approx 1$. L'équation de la question D.4; devient :

$$\ddot{\beta} + \frac{g}{\ell} \beta = \frac{a_0}{\ell}$$

En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ la solution de cette équation est :

$$\beta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{a_0}{g}$$

Les conditions initiales donnent :

$$A = -\frac{a_0}{g} \quad \text{et} \quad B = 0$$

d'où :

$$\beta(t) = \frac{a_0}{g} (1 - \cos(\omega_0 t))$$

D.5. Pour que le pendule ne heurte pas le pare-brise on veut que $\forall t, \beta(t) < \alpha$, ce qui revient à dire que $\beta_{\max} = \frac{2a_0}{g} < \alpha$. On obtient alors :

$$a_0 < \frac{\alpha g}{2} = a_{\max}$$

A.N. avec $\alpha = 15^\circ = 0,26 \text{ rad}$; $a_{\max} = 1,3 \text{ m.s}^{-2}$.

Il faut donc un freinage faible. Le risque est bien réel.

D.6. a) On a :

$$\vec{T} = -T(t) \frac{\overrightarrow{OM}}{\ell}$$

b) Le principe fondamental de la dynamique s'écrivant :

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = -T(t) \frac{\overrightarrow{OM}}{\ell} + m_0 \vec{g} - m_0 \vec{a}$$

on obtient :

$$\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n - \frac{T_n}{m_0 \ell} \overrightarrow{OM}_n \Delta t + (\vec{g} - \vec{a}) \Delta t$$

c) On peut raisonner par récurrence :

- Initialisation : $\overrightarrow{OM_0} = \ell \vec{e}_z$ et $\vec{v}_0 = \vec{0}$. Le point M_0 est dans dans le plan (Oxz) .

À l'ordre 1 :

$$\vec{v}_1 = \vec{0} - \frac{T_0}{m_0 \ell} \overrightarrow{OM_0} \Delta t + (\vec{g} - \vec{a}) \Delta t \in (Oxz)$$

et donc :

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_0} + \vec{v}_1 \Delta t \in (Oxz)$$

- Hérédité : supposons donc que, au rang n , \vec{v}_n et $\overrightarrow{OM_n}$ soient dans le plan (Oxz) . On déduit des deux relations que :

$$\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n - \frac{T_n}{m_0 \ell} \overrightarrow{OM_n} \Delta t + (\vec{g} - \vec{a}) \Delta t \in (Oxz)$$

et

$$\overrightarrow{OM_{n+1}} = \overrightarrow{OM_n} + \vec{v}_n \Delta t \in (Oxz)$$

On en déduit donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les vecteurs position $\overrightarrow{OM_n}$ et vitesse \vec{v}_n appartiennent au plan (Oxz) . Le mouvement est donc bien plan, dans le plan (Oxz) .

III Le soleil a rendez-vous avec la pluie

1) Vitesse des gouttes de pluie

Q1. Un référentiel est l'ensemble constitué :

- d'un **solide** par rapport auquel on décrit le mouvement. On y fixe un point O, origine d'un repère cartésien ;
- d'une **horloge** paramétrant le temps.

Il est galiléen s'il vérifie le principe d'inertie : un point matériel soumis à aucune action mécanique est soit au repos, soit animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme.

Le poids d'une goutte est l'action de la Terre sur celle-ci. Il s'exprime ainsi :

$$\vec{P} = m \vec{g} = \rho \left(\frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^3 \right) g \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\pi \rho D^3 g}{6} \vec{e}_z}$$

Q2. D'une part :

$$[\overrightarrow{F_{\text{frott}}}] = [m] \times [\vec{a}] = M \cdot L \cdot T^{-2}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} [-C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e}_z] &= [-C] \times [\pi] \times [\rho_a] \times [D]^2 \times [v]^2 \times [\vec{e}_z] \\ &= 1 \times 1 \times M \cdot L^{-3} \times L^2 \times L^2 \cdot T^{-2} \times 1 \\ &= M \cdot L \cdot T^{-2} \end{aligned}$$

Nous avons démontré que $[\overrightarrow{F_{\text{frott}}}] = [-C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e}_z]$: **la formule est bien homogène.**

Q3. Nous appliquons le principe fondamental de la dynamique à la goutte, assimilée à un point matériel, dans le référentiel terrestre. Nous utilisons le vecteur \vec{e}_z proposé par l'énoncé. Comme indiqué, le poids et la force de frottement fluide s'appliquent sur la goutte ainsi :

$$m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_{\text{frott}}$$

Lorsque la vitesse limite est atteinte $\vec{a} = \vec{0}$ (en effet $\vec{v} = \vec{v}_{\text{lim}} = \text{cte}$). D'où, d'après les expressions Q1 et Q2 :

$$\vec{0} = \frac{\pi \rho D^3 g}{6} \vec{e}_z - C \pi \rho_a D^2 v^2 \vec{e}_z = \vec{0}$$

On identifie v_{lim} par projection sur l'axe \vec{e}_z :

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{\rho g}{6C\rho_a}} \sqrt{D}$$

puis $\vec{v}_{\text{lim}} = v_{\text{lim}} \vec{e}_z$, on identifie :

$$\boxed{K = \sqrt{\frac{\rho g}{6C\rho_a}}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{v}_{\text{lim}} = K \sqrt{D} \vec{e}_z}$$

Application numérique : $K = 144 \text{ m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$ ainsi :

- pour $D = 1 \text{ mm}$: $v_{\text{lim}} = 4,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- pour $D = 3 \text{ mm}$: $v_{\text{lim}} = 7,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- pour $D = 5 \text{ mm}$: $v_{\text{lim}} = 10,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q4. Nous pouvons lister plusieurs phénomènes :

- les gouttes de grande taille se déforment sous l'effet de la force de traînée, ainsi le coefficient géométrique entre la surface frontale et le volume de la goutte évolue ;
- (HP) les gouttes de petite taille correspondent à un nombre de Reynolds plus petit, où le coefficient de traînée peut être différent. Pour $D < 1 \text{ mm}$, l'évolution de v_{lim} en fonction de D semble être linéaire, indiquant davantage une force de frottement type Stokes ($\vec{F}_{\text{frott}} = -AD\vec{v}$).

2) Disdromètre à impact avec platine

Q5. On applique le principe fondamental de la dynamique à la platine dans le référentiel du support (galiléen) dans une situation statique. On utilise le repère proposé par l'énoncé. Sur la platine s'exercent :

- son poids :

$$\vec{P} = Mg\vec{e}_z$$

- la force de frottement :

$$\vec{f} = -\lambda v_{\text{platine}} = \vec{0}$$

car on traite une situation statique ;

- la force de rappel du ressort :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} = +k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) \vec{e}_z$$

en effet, si le ressort est étendu (soit $\ell - \ell_0 > 0$), alors la force est vers le bas ;

— la force d'impact de la goutte $\vec{F}(t) = \vec{0}$ (il n'y a pas d'impact dans cette situation).
Ainsi, appliquons le PFD :

$$m \vec{a} = \vec{0} = Mg \vec{e}_z + \vec{0} + k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) \vec{e}_z + \vec{0}$$

En projetant sur \vec{e}_z :

$$Mg + k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\ell_{\text{éq}} = \ell_0 - \frac{Mg}{k}}$$

Q6. Reprenons la m^ame étude, dans une situation non-statique :

— le mouvement étant limité à une translation sur l'axe z , l'accélération est :

$$\vec{a} = \frac{d^2 Z}{dt^2} \vec{e}_z$$

— le poids est inchangé ;
— la force de frottement est :

$$\vec{f} = -\lambda \overrightarrow{v_{\text{platine}}} = -\lambda \frac{dZ}{dt} \vec{e}_z$$

— la force de rappel du ressort est :

$$\overrightarrow{F_{\text{rappel}}} = +k(\ell - \ell_0) \vec{e}_z$$

or $Z = \ell_{\text{éq}} - \ell$ par définition d'où :

$$\overrightarrow{F_{\text{rappel}}} = k(\ell_{\text{éq}} - Z - \ell_0) \vec{e}_z$$

Ainsi :

$$M \frac{d^2 Z}{dt^2} \vec{e}_z = Mg \vec{e}_z - \lambda \frac{dZ}{dt} \vec{e}_z + k(\ell_{\text{éq}} - Z - \ell_0) \vec{e}_z + F(t) \vec{e}_z$$

or $Mg + k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0$ d'après la question précédente donc, en projetant sur \vec{e}_z :

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{\lambda}{M} \frac{dZ}{dt} + \frac{k}{M} Z = F(t)$$

On identifie :

$$\boxed{\gamma = \frac{\lambda}{M}} \quad \text{et} \quad \boxed{\beta = \frac{k}{M}} \quad \text{de sorte que} \quad \boxed{\frac{d^2 Z}{dt^2} + \gamma \frac{dZ}{dt} + \beta Z = \frac{F(t)}{M}}$$

Q7. τ correspond à la durée d'impact de la goutte sur la platine (ainsi l'accélération subie est de l'ordre de v_{lim}/τ). Cela correspond à l'intervalle de temps séparant l'impact de la tête de la goutte et l'impact de sa queue. Ainsi, si sa vitesse n'évolue pas au cours de l'impact $v_{\text{lim}}\tau = D$ d'où :

$$\boxed{\tau \approx \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}}$$

Or $v_{\text{lim}} = K\sqrt{D}$ d'où, avec le facteur correctif proposé par l'énoncé :

$$\boxed{\tau = \xi \frac{\sqrt{D}}{K} = 2,2 \times 10^{-4} \text{ s} = 0,22 \text{ ms}}$$

Q8.a) La réponse du disdromètre est la plus rapide si le facteur de qualité vaut 1/2. Or :

$$\omega_0^2 = \beta \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \gamma$$

Si $Q = 1/2$, alors $\omega_0 = \gamma/2$ d'où :

$$\boxed{\frac{\gamma^2}{4} = \beta}$$

Q8.b) On cherche à résoudre l'équation :

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + \gamma \frac{dZ}{dt} + \frac{\gamma^2}{4} Z = \frac{F_0}{M}$$

avec les conditions initiales $Z(0) = 0$ et $\frac{dZ}{dt}(0) = 0$. Résolvons d'abord l'équation homogène. Le polynôme caractéristique est :

$$r^2 + \gamma r + \frac{\gamma^2}{4} = 0$$

il possède une racine double $r_0 = -\gamma/2$. La solution de l'équation homogène est donc :

$$Z(t) = (At + B) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)$$

où A et B sont deux constantes d'intégration. Une solution particulière de cette équation est $Z(t) = \frac{4F_0}{M\gamma^2}$ (en effet, dans ce cas les dérivées sont nulles d'où le résultat). Or :

$$\frac{4}{M\gamma^2} = \frac{1}{\beta M} = \frac{1}{k}$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$Z(t) = \frac{F_0}{k} + (At + B) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)$$

Cherchons A et B en utilisant les conditions initiales.

$$Z(0) = \frac{F_0}{k} + B$$

donc, comme $Z(0) = 0$, $B = -\frac{F_0}{k}$. Ensuite :

$$\frac{dZ}{dt}(t) = 0 + A \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) + (At + B) \left(\frac{-\gamma}{2} \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\right)$$

soit :

$$\frac{dZ}{dt}(0) = A - \frac{\gamma B}{2}$$

ainsi $A = \gamma B/2$ finalement :

$$\boxed{Z(t) = \frac{F_0}{k} \left(1 - \left(\frac{\gamma t}{2} + 1\right) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\right)}$$

Q8.c) Il faut $Z(\tau) = \frac{F_0}{k}$ soit :

$$\left(\frac{\gamma\tau}{2} + 1\right) \exp\left(-\frac{\gamma\tau}{2}\right) = 0$$

γ et τ étant positifs, il est impossible que $\frac{\gamma\tau}{2} + 1$ soit nul. Si $\frac{\gamma\tau}{2} \gg 1$, alors

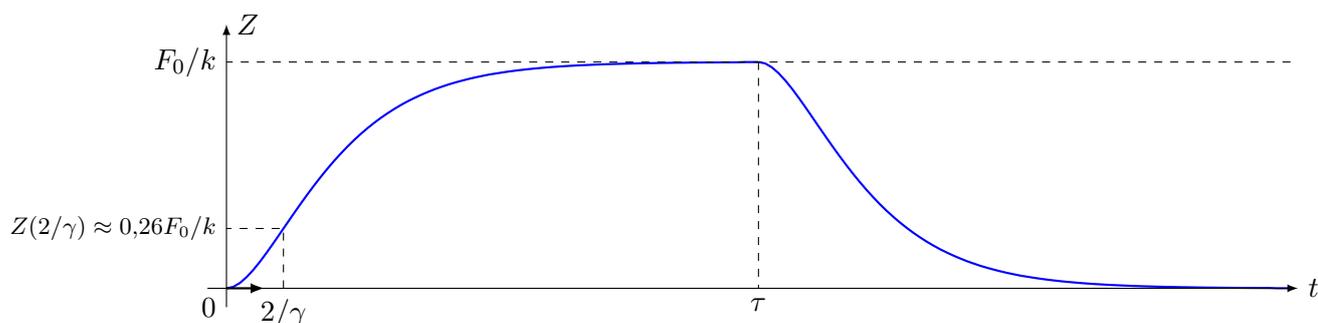
$$\exp\left(-\frac{\gamma\tau}{2}\right) \ll 1$$

et on peut écrire $Z(\tau) = \frac{F_0}{k}$ Ainsi :

$$Z(\tau) = \frac{\pi\rho D^3}{6} \frac{K\sqrt{D}}{\xi\sqrt{D}} \frac{1}{k} = \frac{\pi\rho K^2}{6\xi k} D^3$$

On a démontré le résultat demandé avec $\alpha = 3$

Q8.d) Pour $\tau < t < 2\tau$, on observe la relaxation du plateau vers sa position d'équilibre sans force, sur un même temps typique :



Q8.e) Le coefficient de proportionnalité entre Z et D^3 est $\frac{\pi\rho K^2}{6\xi k}$ ne dépend pas de la goutte. La connaissance de ces différents coefficients ou un étalonnage permet de relier Z à D .

3) Dimensionnement et étalonnage du disdromètre à impact

Q13. Pendant une durée τ , ce sont les gouttes contenues dans le cylindre de hauteur $v_{\text{lim}}\tau$ de surface S qui vont frapper le disdromètre. Leur nombre est $N \times S v_{\text{lim}}\tau$. D'où :

$$G = NS\xi D$$

On veut $G < 1$ soit $S < \frac{1}{N\xi D}$:

$$S_{\text{max}} = \frac{1}{N\xi D}$$

Q14. Pour estimer la taille moyenne des gouttes, on somme les produits du nombre de goutte de taille D (soit $n(D)dD$) par leur taille, et on divise par le nombre total de gouttes. Dans la distribution continue, cela s'exprime sous la forme d'une intégrale :

$$\langle D \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} D n(D) dD}{\int_0^{+\infty} n(D) dD}$$

Ainsi :

$$\langle D \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} D n_0 \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) dD}{\int_0^{+\infty} n_0 \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) dD}$$

On effectue le changement de variable $x = D/D_0$:

$$\langle D \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} x D_0 n_0 \exp(-x) D_0 dx}{\int_0^{+\infty} n_0 \exp(-x) D_0 dx} = \frac{D_0^2 n_0 \int_0^{+\infty} x \exp(-x) dx}{D_0 n_0 \int_0^{+\infty} \exp(-x) dx}$$

Or $\int_0^{+\infty} \exp(-x) dx = [-\exp(-x)]_0^{+\infty} = 1$ et d'après l'énoncé $\int_0^{+\infty} x \exp(-x) dx = 1$ ainsi, on a bien montré que :

$$\boxed{\langle D \rangle = D_0}$$

Q15. Une goutte de rayon D frappe le disdromètre si elle est dans le cylindre de hauteur $v_{\text{lim}} \tau = \xi D$. Ainsi :

$$G = \int_0^{+\infty} \xi D S n(D) dD = \xi S \int_0^{+\infty} D n_0 \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) dD$$

Nous avons déjà calculé cette intégrale :

$$\boxed{G = D_0^2 n_0 \xi S}$$

La condition $G < 1$ permet d'écrire :

$$\boxed{S_{\text{max}} = \frac{1}{D_0^2 n_0 \xi}}$$

Application numérique : $D_0 = 1,5 \times 10^{-3}$ m, $n_0 = 8 \times 10^6$ m⁻⁴ et $\xi = 6,5$:

$$\boxed{S_{\text{max}} = 8,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 85 \text{ cm}^2}$$

La photo 2 montre une platine circulaire de diamètre 10 cm soit une surface d'environ 80 cm² : le dimensionnement est correct.

Q16. Le cadre est le même que celui de la Q13. Pendant dt , le nombre de gouttes qui frappent la surface est le nombre de goutte dans le cylindre de hauteur $v_{\text{lim}}(D_0) dt$ soit $N S v_{\text{lim}}(D_0) dt$. Le volume d'une goutte est $\pi D_0^3/6$. Par unité de surface et de temps :

$$\boxed{R = N \frac{\pi D_0^3}{6} v_{\text{lim}}(D_0)}$$

Q17. En général, le volume lié au gouttes de diamètre compris entre D et $D + dD$ est :

$$n(D) dD \times S v_{\text{lim}}(D) dt \times \frac{\pi D^3}{6}$$

- $n(D) dD$ est le nombre de gouttes de rayon compris entre D et $D + dD$ par unité de volume ;
- $S v_{\text{lim}}(D) dt$ est le volume du cylindre contenant ces gouttes qui vont frapper la surface S pendant dt ;
- $\pi D^3/6$ est le volume d'une goutte de rayon D .

Ainsi, par unité de surface et de temps :

$$\boxed{R = \int_0^{+\infty} n(D) dD v_{\text{lim}}(D) \times \frac{\pi D^3}{6}}$$

Ainsi :

$$R = \int_0^{+\infty} K \sqrt{D} \frac{\pi D^3}{6} n_0 \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) dD$$

On effectue le changement de variable $x = D/D_0$:

$$R = \int_0^{+\infty} K D_0^{4,5} n_0 \frac{\pi}{6} x^{3,5} \exp(-x) dx$$

$$R = K D_0^{4,5} n_0 \frac{\pi}{6} I \quad \text{où} \quad I = \int_0^{+\infty} x^{3,5} \exp(-x) dx \approx 11,6$$

Application numérique : $D_0 = 1,5 \times 10^{-3}$ m, $n_0 = 8 \times 10^6$ m⁻⁴ et $K = 150$ m^{1/2} · s⁻¹ :

$$R = 1,4 \text{ mm/s}$$

Soit $5,1 \times 10^3$ mm/h : ce résultat est gigantesque...

Q18. Cet histogramme nous donne la répartition des tailles de goutte (la première barre correspond à $0 < D < 0,1$ mm, la seconde à $0,1 \text{ mm} < D < 0,2$ mm, etc.). Il paraît difficile d'estimer n_0 , mais on peut simplement calculer le volume correspondant à chaque barre :

$$V_i = N_i \times V(D)$$

où $V(D)$ est le volume moyen d'une goutte. On peut écrire :

$$V(D) = \frac{1}{\delta D} \int_{D-\frac{\delta D}{2}}^{D+\frac{\delta D}{2}} \frac{\pi D^3}{6} dD$$

en supposant la répartition des diamètres homogène sur l'intervalle $[D - \frac{\delta D}{2}; D + \frac{\delta D}{2}]$. Il reste à sommer les différents volumes associés à chaque taille de goutte pour conclure.

FIN DU CORRIGÉ