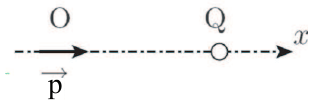
TD n°8 - Dipôles électrostatiques et magnétiques

1 Interaction ion-dipôle

On place au point O de l'axe (Ox) un dipôle dont le moment dipolaire électrique $\overrightarrow{p}$ est orienté suivant $+\overrightarrow{u_x}$. On place un cation de charge Q sur l'axe (Ox), en un point d'abscisse $x > 0$ grande devant la taille caractéristique du dipôle.

1. A partir de l'expression du potentiel électrostatique, déterminer le champ $\overrightarrow{E_{dip}}$ créé par le dipôle au niveau du cation.
2. On considère que le dipôle est fixe et que le cation est mobile. Quelle est la force $\overrightarrow{F_{dip}}$ exercée par le dipôle sur le cation ? On envisagera deux méthodes pour effectuer le calcul.
   L'interaction est-elle attractive ou répulsive ? Interpréter.

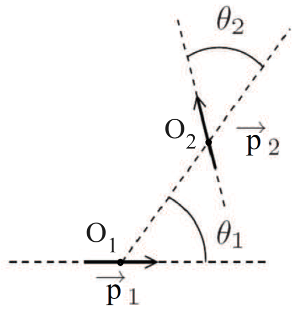


Réponses : 2. $\overrightarrow{F_{dip}} = \frac{Q\times 2p}{4\pi\varepsilon_0 x^3}\overrightarrow{u_x}$.

2 Interaction dipôle-dipôle

On considère deux dipôles de moment dipolaire électrique $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{p_2}$, placés dans la configuration indiquée sur la figure ci-dessous, à une distance r l'un de l'autre maintenue constante (O_1 et O_2 sont fixes).
On choisit un repère en coordonnées polaires (d'origine le milieu du dipôle de moment $\overrightarrow{p_1}$) et on se place dans l'approximation dipolaire.

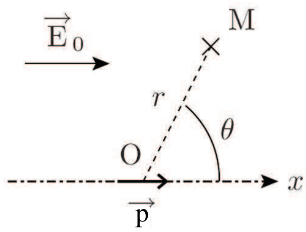
1. Donner l'expression du champ créé en O_2 par le dipôle de moment $\overrightarrow{p_1}$.
2. Exprimer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p2}$ du dipôle de moment $\overrightarrow{p_2}$ placé dans le champ du dipôle de moment $\overrightarrow{p_1}$.
3. En déduire la relation entre les angles θ_1 et θ_2 lorsque le dipôle de moment $\overrightarrow{p_2}$ est dans une position d'équilibre, pour r et θ_1 donnés.



Réponses : 3. $\tan(\theta_2) = \frac{1}{2}\tan(\theta_1)$.

3 Molécule polaire placée dans un champ uniforme

On considère une molécule de moment dipolaire électrique $\vec{p}$.
On définit l'axe (Ox) d'un repère cartésien tel que le centre de masse de la molécule soit en O, avec $\overrightarrow{p}$ suivant (Ox).
On applique un champ électrostatique uniforme $\overrightarrow{E_0} = E_0\overrightarrow{u_x}$.
On repère la position d'un point M par ses coordonnées polaire (r, θ) dans le plan de la feuille.



1. Déterminer l'expression du potentiel $V_0(r, \theta)$ associé au champ $\overrightarrow{E_0}$ au point M, en coordonnées polaires. On prendra comme origine du potentiel $V_0 = 0$ le point O.
2. En déduire le potentiel $V(r, \theta)$ créé en M par la molécule et le champ $\overrightarrow{E_0}$, en se plaçant dans l'approximation dipolaire.
3. Quelle est la nature de la surface équipotentielle $V = 0$?
4. Montrer qu'il existe dans le plan $(Ox, \overrightarrow{E}_0)$ deux points où le champ est nul dans le plan $(Ox, \overrightarrow{E_0})$. On précisera leur position.

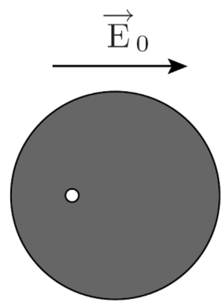
Réponses : 2. $V(r, \theta) = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - E_0 r\right)\cos(\theta)$, 4. $\overrightarrow{OM_\pm} = \pm\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 E_0}\right)^{\frac{1}{3}}\overrightarrow{u_y}$.

4 Polarisabilité de la matière dans le modèle de Thomson

Dans le modèle de l'atome d'hydrogène proposé par Thomson, le noyau est une boule de centre O et de rayon a à l'intérieur de laquelle la charge e est uniformément répartie. L'électron est une charge ponctuelle $-e$ pouvant se déplacer à l'intérieur de cette boule chargée.

1. Déterminer le champ créé par la boule uniformément chargée à l'intérieur de celle-ci.
2. En déduire la force exercée sur l'électron. on montrera que cette force est analogue à une force de rappel de ressort dont on précisera la constante de raideur k. Déterminer la position d'équilibre de l'électron. Est-elle stable ?

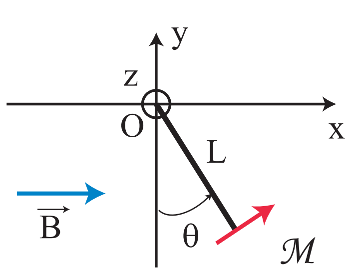
   En partant de la position d'équilibre précédente, on applique un champ électrostatique $\overrightarrow{E_0}$ uniforme, supposé ne pas modifier la répartition des charges du noyau.
3. Exprimer la distance r_{eq} entre la nouvelle position d'équilibre de l'électron et le centre du noyau.
4. Pourquoi l'atome d'hydrogène acquiert-il un moment dipolaire $\overrightarrow{p}$ à l'équilibre, en présence d'un champ électrique $\overrightarrow{E}_0$?
   Exprimer la polarisabilité α définie par la relation $\overrightarrow{p} = \alpha\varepsilon_0\overrightarrow{E_0}$.



Réponses : 3. $\overrightarrow{r_{eq}} = -\frac{4\pi\varepsilon_0 a^3}{e}\overrightarrow{E_0}$, 4. $\alpha = 4\pi a^3$.

5 Oscillations d'un petit aimant

Un petit aimant de masse m et de moment magnétique $\overrightarrow{M}$ est suspendu au bout d'une tige rigide de masse négligeable de longueur L, pouvant effectuer des mouvements de rotation autour de l'axe $(O, \vec{u}_z)$. Il est plongé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\vec{u}_x$ uniforme, avec $B > 0$. Déterminer la période T_0 des petites oscillations en utilisant le théorème du moment cinétique, puis retrouver ce résultat avec le théorème de l'énergie mécanique.



Réponses : $T_0 = 2\pi/\sqrt{\frac{g}{L} + \frac{\mathcal{M}B}{mL^2}}$.

6 Moteur synchrone

Un montage convenable de bobines parcourues par des courants alternatifs de pulsation ω_0 produit dans un certain volume un champ magnétique $\overrightarrow{B}$, d'amplitude B_0, qui tourne dans un plan (xOy) autour d'un axe (Oz) avec la pulsation ω_0 constante.

D'autre part, une pièce mobile autour de l'axe (Oz) (le rotor) constituée d'un petit aimant permanent portant un moment magnétique permanent $\overrightarrow{\mathcal{M}}$, orthogonal à (Oz), tourne dans le plan (xOy) avec un mouvement de rotation uniforme de pulsation ω.

La valeur de l'angle $(\overrightarrow{\mathcal{M}}, \overrightarrow{B})$ à l'instant initial est noté α comme indiqué sur la figure ci-dessous.

1. Calculer la valeur instantanée du couple magnétique $\overrightarrow{\Gamma}$ exercé par le champ sur la pièce mobile. En déduire sa valeur moyenne au cours du temps.
2. En appliquant le théorème du moment cinétique à la partie mobile en rotation autour de l'axe du moteur (rotor), déterminer les valeurs de ω et α pour lesquelles ce dispositif fonctionne en moteur.
3. Un régime permanent de fonctionnement moteur est dit stable si, lorsque le moteur prend accidentellement de l'avance (ou du retard) sur son régime permanent, le jeu des forces qu'il subit lui fait perdre

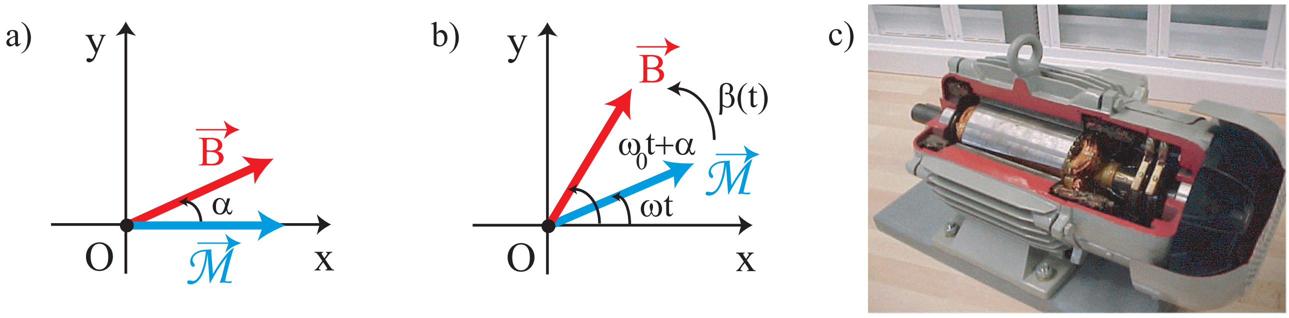
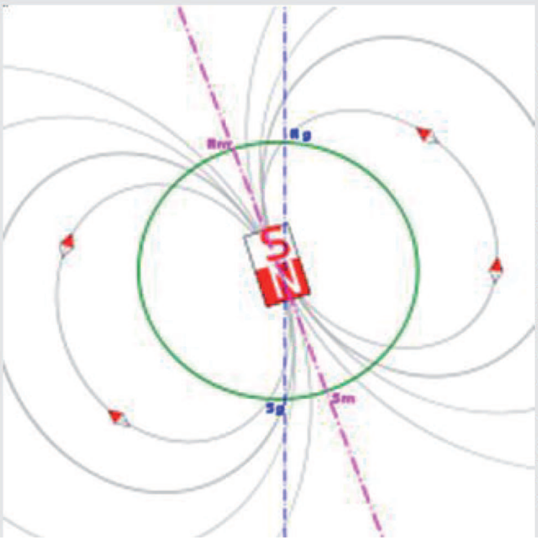


FIGURE 1 – *Action d'un champ magnétique $\vec{B}$ tournant à une pulsation Ω sur un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ tournant à la vitesse angulaire ω. a) Configuration à $t = 0$, et b) configuration à l'instant t. c) Exemple de moteur synchrone.*

cette avance (ou ce retard) ; il est instable dans le cas contraire.
À partir du graphe $\Gamma(\alpha)$, déterminer le domaine de α correspondant à un régime de fonctionnement stable lorque le moteur fournit un couple utile Γ_u.

Réponses : 2. $P_{\max} = \mathcal{M} B_0 \omega_0 sin\alpha$.

7 Résolution de problème - Moment magnétique de la Terre



« Le champ magnétique terrestre est engendré par les mouvements du noyau métallique liquide des couches profondes de la Terre. Il peut être vu comme celui d'un aimant droit, en première approximation (ou d'un dipôle magnétique, ou d'une bobine plate parcourue par un courant électrique).
En un point donné du champ magnétique terrestre, le vecteur $\vec{B}$ possède une composante verticale $\vec{B}_v$ (dirigée vers le centre de la Terre) et une composante horizontale $\vec{B}_0$. Aux pôles magnétiques, la composante horizontale a une valeur nulle. L'angle formé par $\vec{B}$ et $\vec{B}_0$ est appelé "inclinaison". Il augmente lorsque l'on se rapproche des pôles en tendant vers 90°.
Actuellement, la valeur du champ magnétique est de l'ordre de 47 μT au centre de la France. »
D'après « http ://fr.wikipedia.org/wiki/Champ magnétique terrestre »

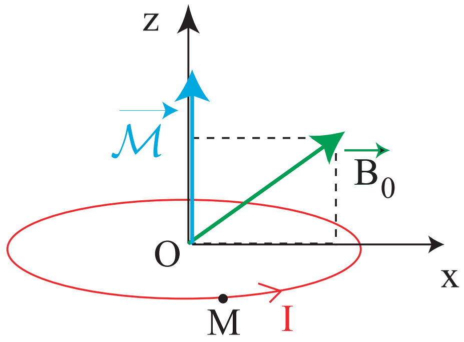
Évaluer, grâce aux lois de l'électromagnétisme, la valeur du moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ de la Terre.

8 Moment des forces de Laplace

Considérons une spire circulaire $\mathcal{C}$ de rayon R et d'axe (Oz), parcourue par un courant d'intensité I constante. On note $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ le moment dipolaire magnétique de la spire.

La spire est plongée dans un champ magnétique uniforme et permanent $\overrightarrow{B}_0$ défini par :

$$\overrightarrow{B}_0 = B_{0x}\,\vec{u}_x + B_{0z}\,\vec{u}_z \qquad \text{avec} \quad B_{0x} = \text{cste} \quad \text{et} \quad B_{0z} = \text{cste}$$



Déterminer le moment résultant des efforts de Laplace $\overrightarrow{\Gamma}_O$ s'exerçant sur la spire en O.