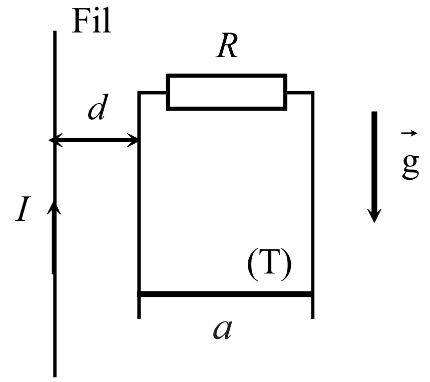
DM n°8 - Magnétostatique et induction

À rendre pour le mardi 21 novembre

1 Rail de Laplace avec fil

Une tige métallique rectiligne (T) de longueur a, de masse m glisse sans frottement le long de deux rails verticaux et parallèles, distants de a. L'ensemble du circuit (tige et rails) a une résistance R.



L'ensemble du dispositif est plongé dans le champ magnétique créé par un fil infini parallèle aux rails, parcouru par un courant d'intensité constante I et situé à une distance d du rail de gauche. On désigne par (Oz) l'axe vertical descendant et par $\vec{g} = g\,\vec{u}_z$ le champ de pesanteur.

À l'instant $t = 0$, (T) est abandonnée sans vitesse initiale et reste horizontale à tout instant.

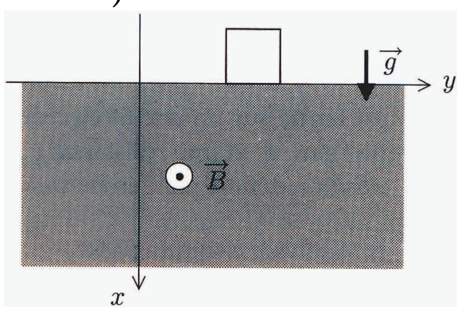
On pourra poser : $K = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi} ln\left(\dfrac{d+a}{d}\right)$.

1. On note $i(t)$ l'intensité qui traverse le circuit à l'instant t, déterminer les deux équations différentielles reliant $i(t)$ à la vitesse $v(t)$ de la tige.
2. Écrire une équation différentielle relative à la seule fonction $i(t)$ et déterminer les deux grandeurs $i(t)$ et $v(t)$.
3. Faire un bilan énergétique.

Réponses : 2. $i = \pm \dfrac{2\pi mg}{\mu_0 I ln\left(\frac{d+a}{a}\right)}\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$ avec $\tau = \dfrac{4\pi^2 mR}{\left[\mu_0 I ln\left(\frac{d+a}{a}\right)\right]^2}$; le signe dépend de la convention choisie.

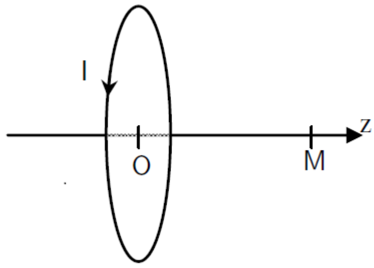
2 Freinage d'une spire par induction (facultatif)

Une spire carrée de côté a, de masse m, tombe dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{u}_x$. Dans le demi-espace $x > 0$ règne le champ magnétique uniforme et permanent $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{u}_z$. A l'instant $t = 0$, la spire se trouve dans la situation représentée sur la figure ci-contre, et sa vitesse est $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{u}_x$, son côté inférieur est en $x = 0$.



1. Montrer que le mouvement ultérieur de la spire reste une translation verticale selon l'axe .
2. Soit R la résistance de la spire. Déterminer la vitesse $v(t)$ de la spire.
3. La spire a maintenant une résistance nulle (spire supraconductrice) et on note L son inductance propre. Reprendre l'étude précédente et préciser la condition d'oscillation de la spire.

3 Calcul du champ magnétique créé par une spire circulaire en un point proche de son axe (facultatif)



On considère une spire circulaire de rayon R, de centre O, d'axe Oz parcourue par un courant I.

1. Montrer que le champ magnétique créé en un point M de l'axe de la spire est donné par :

$$\vec{B}(M) = B_0(z)\vec{u}_z$$

Discuter de la parité de $B_0(z)$.

2. On cherche maintenant à exprimer le champ magnétique en un point M' au voisinage de l'axe Oz, c'est à dire avec $r \ll R$ et $r \neq 0$.

(a) Montrer que le champ magnétique créé en M' s'écrit :

$$\vec{B}(M') = B_r(r,z)\,\vec{u}_r + B_z(r,z)\,\vec{u}_z$$

(b) En exprimant le flux de $\vec{B}$ à travers un cylindre d'axe Oz, de rayon $r \ll R$ et dont les bases inférieure et supérieure sont situées aux cotes z et $z + dz$, montrer que, lorsque $dz \to 0$:

$$B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_0}{dz}(z)$$

(c) En exprimant la circulation de $\vec{B}$ le long d'un contour rectangulaire passant par $M'(r,z,\theta)$, de hauteur dz et de largeur dr, lorsque $dz \to 0$ et $dr \to 0$, montrer que :

$$B_z(r,z) = B_0(z) - \frac{r^2}{4}\frac{d^2B_0}{dz^2}(z)$$

(d) On rappelle que le flux du champ magnétique $\vec{B}(M')$ à travers toute surface fermée est toujours nul. Dans le cas particulier d'un volume infinitésimal autour du point M' exprimé en coordonnées cylindriques, montrer que cette propriété permet d'obtenir une relation entre B_r et B_z. On commentera le résultat obtenu sachant que l'opérateur divergence en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\text{div } \overrightarrow{a}(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$