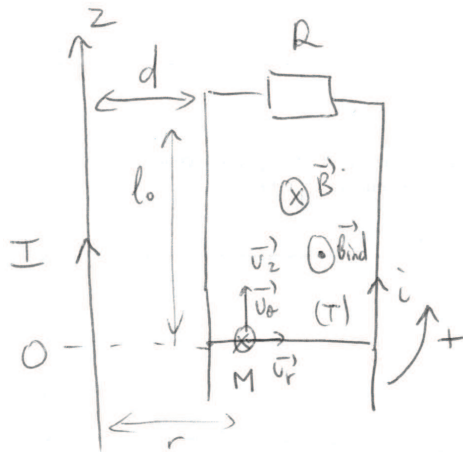


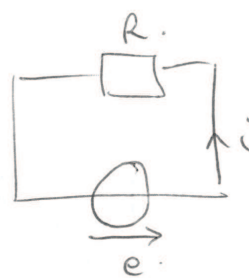
Correction - DM n°8 - Magnétostatique et induction

1 Rail de Laplace avec fil



Rail de Laplace dans un champ non uniforme.

circuit elec \Leftrightarrow :



1) $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

Analyse qualitative: la barre chute \Rightarrow la taille du cadre augmente et le flux de \vec{B} selon \vec{u}_θ augmente \Rightarrow d'après la loi de Lenz, \vec{B}_{ind} qui s'oppose à cette variation $\Rightarrow \vec{B}_{ind} \parallel -\vec{u}_\theta$

$\Rightarrow i$ dans le sens anti-horaire.

(cohérent car $\vec{F}_{Laplace}$ s'oppose à la chute de la barre.)

\mathcal{E}_{elec} : $e = Ri = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B}(r,z) \cdot d\vec{S}$

car $z < 0$.

flux orienté selon $-\vec{u}_\theta$ d'après la règle de la main droite (convention).

$$e = -\frac{d}{dt} \left[\int_{z=0}^{z=l_0} \int_{r=d}^{r=d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \cdot -dr \vec{u}_\theta \right] = +\frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_0 I l_0}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \right]$$

$e = -\frac{\mu_0 I z}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$ et $z < 0$ donc $e > 0$
 $= Ri$ (1) cohérent avec $i > 0$.

Eq méca :

$$m \ddot{z} = \vec{F}_L \cdot \vec{u}_z - mg$$

$$\vec{F}_L = \int_{r=d}^{d+a} i dr \vec{u}_r \wedge \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \right)$$

$$= \frac{i \mu_0 I \ln \left(\frac{d+a}{d} \right)}{2\pi} \vec{u}_z \quad // \quad + \vec{u}_z \text{ cohérent.}$$

on notera que la force n'est pas uniforme : la barre pourrait tourner en tombant...
 → on suppose qu'elle est maintenue horizontale.

$$m \ddot{z} = \frac{\mu_0 I \ln \left(\frac{d+a}{d} \right)}{2\pi} i - mg \quad (2)$$

(1) dans (2) ⇒
$$\frac{-m R \frac{di}{dt} \frac{2\pi}{\mu_0 I \ln \left(\frac{d+a}{d} \right)}}{\mu_0 I \ln \left(\frac{d+a}{d} \right)} = \frac{\mu_0 I \ln \left(\frac{d+a}{d} \right)}{2\pi} i - mg$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} + \left(\frac{\mu_0 I \ln \left(\frac{d+a}{d} \right)}{2\pi} \right)^2 \frac{i}{mR} = \frac{g \mu_0 I \ln \left(\frac{d+a}{d} \right)}{R \frac{2\pi}{\mu_0 I \ln \left(\frac{d+a}{d} \right)}}$$

$$\Rightarrow i = \frac{2\pi mg}{\mu_0 I \ln \left(\frac{d+a}{d} \right)} \left[1 - e^{-t/\tau} \right] \quad \text{avec } \tau = mR \left[\frac{\mu_0 I \ln \left(\frac{d+a}{d} \right)}{2\pi} \right]^2$$

$i > 0$ et $i \xrightarrow{t \rightarrow \infty} i_{lim} = \frac{2\pi mg}{\mu_0 I \ln \left(\frac{d+a}{d} \right)}$
 $i(t=0) = 0$

$$v = \dot{z} = -Ri = - \frac{mgR}{\left[\frac{\mu_0 I \ln \left(\frac{d+a}{d} \right)}{2\pi} \right]^2} \left[1 - e^{-t/\tau} \right]$$

$v < 0$
 $v(t=0) = 0$ et $v_{lim} = \frac{-mgR}{\left[\frac{\mu_0 I \ln \left(\frac{d+a}{d} \right)}{2\pi} \right]^2}$

3) Bilan énergétique

$$(1) \Rightarrow \int x i dt \quad - \frac{\mu_0 I \dot{z}}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) i dt = Ri^2 dt.$$

$$(2) \times \dot{z} dt \Rightarrow - \frac{\mu_0 I \dot{z}}{2\pi} dt \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) i = -mg \dot{z} dt - m \ddot{z} \dot{z} dt.$$

$$\Rightarrow d \left[\overbrace{\frac{1}{2} m \dot{z}^2}^{E_c} \right] + d \left[\overbrace{mgz}^{E_p} \right] = - Ri^2 dt.$$

$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = - Ri^2 = - P_{\text{Joule}}.$$

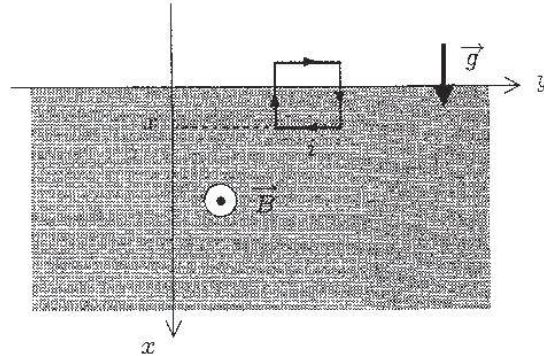
$E_m \downarrow$ et est dissipée par effet Joule.

2 Freinage d'une spire par induction

1. Quand la spire pénètre dans la zone de champ magnétique, le flux magnétique à travers elle varie, elle est donc parcourue par un courant induit et se trouve soumise à des forces de Laplace. Le courant induit s'oppose à l'augmentation de flux magnétique, il est donc orienté dans le sens horaire. Les forces de Laplace vont freiner la chute libre de la spire. Dès que la spire est entièrement dans la zone de champ magnétique, le flux magnétique à travers elle ne varie plus, la chute libre reprend.

Commençons par **orienter** le circuit. Puisque l'analyse physique nous a permis de déterminer le sens réel du courant induit, nous choisissons ce sens-là (voir figure ci-contre).

Les forces de Laplace sur les côtés verticaux de la spire s'annulent. Il ne reste que la force sur le côté du bas, qui est verticale. Toutes les forces appliquées à la spire sont verticales, la vitesse initiale aussi, le mouvement ultérieur de la spire reste donc une translation selon l'axe Ox .



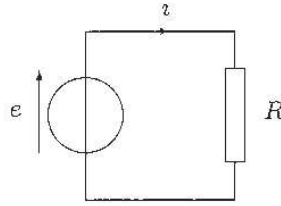
2. La spire est soumise à son poids et aux forces de Laplace. La résultante des forces de Laplace sur la spire est : $\vec{F}_{\text{Lap}} = -i(t)aB_0\vec{u}_x$. Le théorème de la résultante cinétique appliqué à la spire et projeté sur l'axe Ox donne l'équation mécanique :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - aB_0 i(t).$$

Pour déterminer la force électromotrice induite dans la spire, on utilise la loi de Faraday :

loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ où le flux de \vec{B} est calculé à travers la surface **orientée** par le sens du courant i . La surface est orientée selon $-\vec{u}_z$ d'où $\Phi_B(t) = -ax(t)B_0$ et $e = av(t)B_0$.

Le circuit électrique équivalent est donc :



L'équation électrique s'écrit $e(t) = Ri(t)$, donc $i(t) = \frac{aB_0}{R}v(t)$.

En éliminant $i(t)$ entre l'équation électrique et l'équation mécanique, nous obtenons l'équation vérifiée par $v(t)$: $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_\infty}{\tau}$, où $\tau = \frac{mR}{(aB_0)^2}$ et $v_\infty = \frac{mgR}{(aB_0)^2}$. La solution de cette équation, compte tenu de $v(0) = v_0$ est :

$$v(t) = (v_0 - v_\infty) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_\infty.$$

À partir de l'instant t_1 tel que $x(t_1) = a$, le mouvement continue par une phase de chute libre avec une vitesse initiale inférieure à v_0 .

3. Si la résistance de la spire est nulle, nous ne pouvons plus négliger le phénomène d'auto-induction. La force électromotrice totale induite dans la spire est donc $e(t) = aB_0v(t) - L\frac{di}{dt}$. L'équation électrique du circuit est alors $e(t) = 0$. En dérivant l'équation mécanique par rapport au temps et en remplaçant $\frac{di}{dt}$ par l'expression ci-dessus, nous obtenons l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$: $\frac{d^2v}{dt^2} + \omega^2v(t) = 0$ où $\omega^2 = \frac{(aB_0)^2}{mL}$. La solution est, compte tenu de $v(0) = v_0$ et de $\frac{dv}{dt}(0) = g$: $v(t) = v_0 \cos \omega t + \frac{g}{\omega} \sin \omega t$. En intégrant cette équation, avec $x(0) = 0$, nous obtenons la position instantanée de la spire :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{g}{\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

Le mouvement de la spire sera oscillatoire si la spire ne pénètre pas entièrement dans la zone de champ magnétique donc si :

$$\frac{g}{\omega^2} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2} < a.$$

s On voit

que la condition précédente est restrictive sur la valeur de la vitesse, ce qui est tout à fait cohérent.

Remarque : Soit

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \omega t \cos \varphi - A \sin \omega t \sin \varphi$$

donc par identification, $a = A \cos \varphi$ et $b = -A \sin \varphi$, et l'amplitude est donnée par

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ce qui permet de montrer l'inégalité ci-dessus.

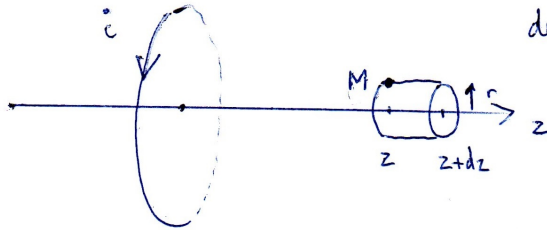
3 Calcul du champ magnétique créé par une spire circulaire en un point proche de son axe

1. Tout les plans passant par M contenant l'axe \vec{u}_z sont des plans d'antisymétrie de la distribution de courant, donc \vec{B} est selon \vec{u}_z . Par ailleurs, la distribution de courant est invariante par rotation d'angle θ , donc \vec{B} ne dépend pas de θ . Finalement, comme r est fixé à $r = 0$, on peut écrire :

$$\vec{B}(M) = B_0(z) \vec{u}_z$$

Par ailleurs, comme le plan de la spire est un plan de symétrie de la distribution de charge, le champ magnétique est antisymétrique par rapport à ce plan, et $\vec{B}(M') = \vec{B}(M)$, où M' est le symétrique de $M(z)$ sur l'axe, de coordonnée $-z$. La fonction $B_0(z)$ est donc paire puisque $B_0(-z) = B_0(z)$. On notera que ceci est cohérent avec l'expression finale de B_z , qui est également paire par rapport à z puisque la dérivée première n'apparaît pas dans l'expression.

2.a) $\vec{B}(M) = B_r(r,z) \vec{U}_r + B_z(r,z) \vec{U}_z$ car la distribution de courant est invariante par rotation d'angle θ et car $(M, \vec{U}_r, \vec{U}_\theta) = \Pi$ antisym des courants donc $\vec{B}(M) \perp \vec{U}_\theta$.



2.b) Flux de \vec{B} à travers le petit cylindre situé entre z et $z+dz$:

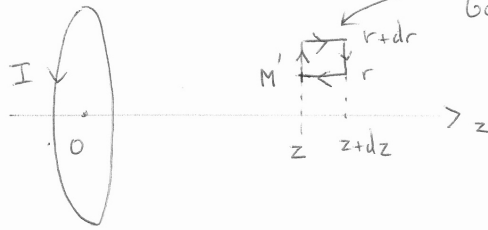
$$\Phi = \underbrace{B_z(r=0, z+dz) \pi r^2}_{\Phi(z+dz)} - \underbrace{B_z(r=0, z) \pi r^2}_{\Phi(z)} + \underbrace{B_r(r,z) 2\pi r dz}_{\Phi_{lat}} = 0$$

\uparrow
 \vec{B} à flux conservatif

$$\Rightarrow \frac{dB_z(r=0, z)}{dz} \pi r^2 = -B_r(r,z) 2\pi r$$

$$\Rightarrow \boxed{B_r(r,z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_0(z)}{dz}}$$

2c) On rappelle que $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I_{\text{en laé}} = 0$
 (ferme) (orienté) pas de courant en laé ici.



$$\text{or } \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{e} = B_r(r, z) dr + B_z(r+dr, z) dz - B_r(r, z+dz) dr - B_z(r, z) dz$$

$$\Rightarrow -\frac{dB_r}{dz}(r, z) dr dz + \frac{dB_z}{dr}(r, z) dr dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dB_z}{dr}(r, z) = \frac{dB_r}{dz}(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{d^2 B_0}{dz^2}$$

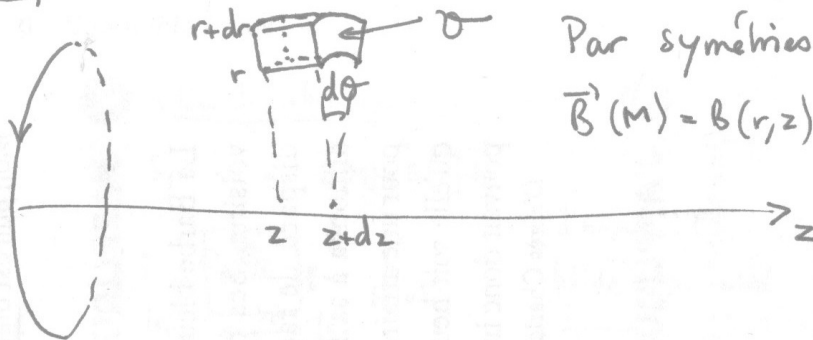
↑
question précédente

$$\Rightarrow B_z(r, z) = -\frac{r^2}{4} \frac{d^2 B_0}{dz^2} + \text{cte}, \text{ or } B_z(r=0, z) = B_0(z) = \text{cte}$$

$$\text{donc } B_z(r, z) = B_0(z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 B_0}{dz^2}$$

$$\text{Finalement : } \vec{B}(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{d^2 B_0(z)}{dz^2} \vec{U}_r + \left[B_0(z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 B_0(z)}{dz^2} \right] \vec{U}_z$$

Rq: Avec flux dans volume infinitésimal



Par symétries et invariances:

$$\vec{B}(M) = B(r,z) \vec{U}_r + B_z(r,z) \vec{U}_z.$$

d'après
 $\vec{B} \perp \vec{U}_\theta$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 = \oint_{\text{selon } \vec{U}_r} + \oint_{\text{selon } \vec{U}_z} + \cancel{\oint_{\text{selon } \vec{U}_\theta}}$$

$$\textcircled{1} = B_r(r,z) r d\theta dz - B_r(r+dr, z) (r+dr) d\theta dz$$

$$= - \frac{\partial}{\partial r} (r B_r(r,z)) d\theta dz dr$$

$$\textcircled{2} = B_z(r,z) r d\theta dr - B_z(r, z+dz) r d\theta dr$$

$$= - \frac{\partial}{\partial z} (B_z) dz r d\theta dr$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0}$$

On retrouve que $\text{div } \vec{B} = 0$ en cylindriques.