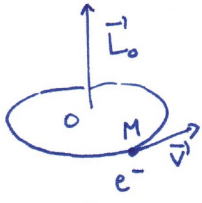


Correction - DM n°9 - Dipôles

1 Expérience de Stern et Gerlach

Partie A

1)  D'après le TMC appliqué à l'e⁻ par rapport à O fixe dans R_{atome} supposé galiléen:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0(\vec{F}^{\text{électrostat}}) = \vec{0}$$

↑
car force centrale.

donc $\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = mrv \vec{u}_z = cr\omega \vec{u}_z = mr^2\dot{\theta} \vec{u}_z$


Le mouvement circulaire de l'électron génère un moment magnétique orbital :

$$\vec{\mu} = I\vec{S} = \frac{-e}{T} \pi r^2 \vec{u}_z = \frac{-e}{2\pi} \pi r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z = \frac{-e}{2m} \vec{L}_0$$

or $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{r\dot{\theta}} = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$ soit $\mu_B = \frac{-e\hbar}{2m}$

2) Hypothèse de Bohr: $\vec{L} = n\hbar \vec{u}_z$
 Dans le niveau fondamental $n=1$: $\vec{\mu} = \frac{-e\hbar}{2m} \vec{u}_z$ et $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \approx 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$

Le modèle semi-classique de Bohr, même s'il donne des résultats convenables, ne peut convenir puisqu'il ne peut expliquer que l'électron ne s'écrase pas sur le noyau à cause de l'énergie rayonnée lors de son mouvement circulaire. Ce modèle ne rend pas compte de la stabilité de la matière. C'est la mécanique quantique qui a pu rendre compte de cette stabilité.

3) Configuration électronique du Lithium: $[\text{Li}] = 1s^2 2s^1$ 

Le lithium possède 3 électrons dans la couche $n=2$ qui correspond à $l=0$. Donc le moment cinétique orbital de ces 3e⁻ est nul puisque $L = \hbar \sqrt{l(l+1)} = 0$

$L_z = 0$ car $-l \leq m_l \leq l$ et donc $m_l = 0$

et finalement $\mu_z = \gamma_e L_z = 0$

Un atome de Lithium n'a donc pas de moment magnétique dû à l'orbite de ses électrons.

D'après la suite du problème, il existe néanmoins un autre moment magnétique à l'échelle atomique : le moment magnétique de spin, mis en évidence par l'expérience de Stern et Gerlach.

Partie B

1. Comme nous avons montré dans la partie A que le moment magnétique orbital du lithium était nul, il n'est pas possible d'interpréter l'expérience sans faire appel à un autre type de moment magnétique au niveau atomique : c'est ce qui a plus tard été appelé le *spin*.

Il en est de même avec des atomes d'argent, de configuration électronique $[\text{Ag}] = [\text{Kr}] 4d^{10} 5s^1$ (exception à la règle de Klechkoswki qui prévoit $[\text{Ag}] = [\text{Kr}] 3d^9 5s^2$, moins stable car la sous-couche n'est pas remplie), dont les électrons de cœur ont des moments magnétiques selon z qui se compensent tous, et

dont l'électron de valence ne contribue pas non plus car c'est un électron d'une sous-couche s (m_l). L'expérience historique de Stern et Gerlach utilisait justement des atomes d'argent.

2) $\vec{F} = -\text{grad} E_p = \frac{d}{dz} (\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \vec{u}_z = \frac{d}{dz} (\mu_z b z) \vec{u}_z = \mu_z b \vec{u}_z$ Rq: on n'aurait pas pu utiliser de champ uniforme car sinon $\vec{F} = \frac{d}{dz} (\mu_z B_z) \vec{u}_z = \vec{0} \Rightarrow$ aucun effet

↑
re dépend que de z

L'application du PFD à un atome de Lithium dans l'entrefer de l'aimant conduit, en négligeant le poids de l'atome par rapport à la force magnétique, à :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = 0 \\ m \ddot{y} = 0 \\ m \ddot{z} = \mu_z b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = \frac{\mu_z b}{m} t + 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 t + 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{\mu_z b}{2m} t^2 \end{cases}$$

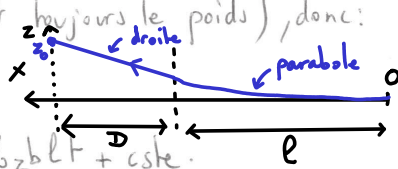
C.I. : $\vec{v}(0) = v_0 \vec{e}_x$ C.I. origine à $t=0$

$\Rightarrow z = \frac{\mu_z b}{2m v_0^2} x^2$ or $E_{c,0} = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow z = \frac{\mu_z b}{4 E_{c,0}} x^2$ * On obtient une trajectoire parabolique qui dépend de μ_z .

3) Lorsque les atomes de Lithium sortent de l'entrefer de l'aimant, ils ne sont plus soumis à aucune force (en négligeant toujours le poids), donc :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = \dot{z}(t_1) = \frac{\mu_z b l}{m v_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 t \\ y = 0 \\ z = \frac{\mu_z b l}{m v_0} t + \text{cste.} \end{cases}$$

↳ temps de sortie de l'entrefer, t_1 $v_0 t_1 = l$



or à $t = t_1$ $z = \frac{\mu_z b l^2}{m v_0^2} + \text{cste} = \frac{\mu_z b l^2}{4 E_{c,0}} \Rightarrow \text{cste} = -\frac{\mu_z b l^2}{2 m v_0^2}$ d'après *

Au moment où l'atome arrive sur l'écran, $x = l + D = v_0 t_2$

donc $z_0 = z(t_2) = \frac{\mu_z b l}{m v_0} \left(\frac{l+D}{v_0} - \frac{l}{2 v_0} \right) = \frac{\mu_z b l}{2 m v_0} (l + 2D) = \frac{\mu_z b l (l + 2D)}{4 E_{c,0}}$

4) Classiquement, les moments magnétiques peuvent prendre n'importe quelle valeur entre 2 valeurs extrêmes à cause de l'orientation du moment magnétique :

$\vec{\mu} \nearrow \rightarrow \searrow \downarrow$

$\mu_{z \max}$ $\mu_{z \min}$

Répartition des atomes sur l'écran sans champ

nombre d'impacts mesurés

Avec champ (cas classique)

impacts

Avec champ (cas observé - quantique)

impacts

Dispersion due à la dispersion initiale en vitesse.

D'après l'observation, on peut en déduire que le moment magnétique des atomes de lithium est quantifié selon z et qu'il ne peut prendre que 2 valeurs:

$$\mu_z = \pm \frac{4E_0 z_0}{b l(l+2D)}$$

5) L'application numérique conduit à :

$$\mu_z = \pm 9 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2$$

Par ailleurs, d'après la partie sur le moment magnétique orbital, on a pu obtenir que pour l'atome d'hydrogène dans le niveau fondamental ($n=1$) tel que $\vec{L}_z = n\hbar\vec{U}_z$ (hypothèse de Bohr) avec $\vec{\mu}_z = \gamma_L \vec{L}_z = \underset{n=1}{\gamma_L} \frac{-e\hbar}{2m} \vec{e}_z = -\mu_B \vec{e}_z$ où μ_B est le magnéton de Bohr, avec $\mu_B = 9,2 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2$.

On obtient finalement ici pour les atomes de lithium:

$$\vec{\mu}_z = \pm \mu_B \vec{e}_z = \pm \frac{e\hbar}{2m} \vec{e}_z$$

6) La théorie quantique prédit:

$$\vec{\mu}_s = -\frac{ge}{2m} \vec{S} = -\frac{e}{m} \vec{S}$$

\rightarrow moment cinétique de spin, analogue à \vec{L} pour le moment cinétique orbital.

Afin d'expliquer l'observation, il faut introduire le spin tel que:

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_s &= \gamma_s \vec{S} \quad \text{avec} \quad \gamma_s = -\frac{e}{m} \\ \|\vec{S}\| &= S = \hbar \sqrt{s(s+1)} \quad \text{avec} \quad s \text{ demi-entier (moment cinétique de spin)} \\ S_z &= \vec{S} \cdot \vec{U}_z = m_s \hbar \quad \text{avec} \quad -s \leq m_s \leq s \quad \text{(moment magnétique de spin)} \end{aligned}$$

Pour l'électron, on en déduit $s = \frac{1}{2}$ et $m_s = \pm \frac{1}{2}$, de

$$\text{sorte que } \vec{\mu}_s = \gamma_s m_s \hbar \vec{e}_z = -\frac{e}{m} \left(\pm \frac{1}{2} \right) \hbar \vec{e}_z = \pm \frac{e\hbar}{2m} \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{\mu}_s = \pm \mu_B \vec{e}_z}; \text{ on retrouve bien le résultat obtenu expérimentalement.}$$

2 Résolution de problème - Attraction électrostatique

Interprétation qualitative de l'expérience

on suppose que le frottement a déposé des e^- au bâton, mais le raisonnement est inchangé si des e^- sont arrachés par frottement.

Au voisinage du bâton, les molécules d'eau s'orientent de telle sorte que $\vec{p} // \vec{E}_{\text{bâton}}$, puis sont attirées vers les zones de champ intense, c'est à dire vers le bâton, car la force s'exerçant sur la partie positive du dipôle est légèrement plus élevée que celle s'exerçant sur la partie négative, plus loin du bâton.

loin du bâton, les molécules d'eau sont orientées aléatoirement à cause de l'agitation thermique.

Estimation de la charge électrique Q portée par le bâton

Méthode 1 : à partir de l'estimation de la force s'exerçant sur les molécules d'eau.

D'après le schéma, cette force \vec{F}_e d'origine électrostatique est comparable au poids puisque le filet d'eau est dévié notablement, sans que les molécules d'eau ne viennent pour autant se coller au bâton.

$\vec{F}_e = \text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = p \frac{dE}{dr}$ puisque p permanent et les 2 vecteurs \vec{p} et \vec{E} sont alignés.
 or $p = qd \approx e \cdot \text{taille molécule}$
 $p \approx 10^{-19} \times 10^{-10} \approx 10^{-29} \text{ C.m.}$

et $E \approx E_{\text{créé par un cylindre infini portant une charge } Q}$
 (on aurait pu prendre un fil infini ou même une charge ponctuelle pour trouver l'ordre de grandeur).

Le théorème de Gauss conduit à $E = \frac{Q}{2\pi r \epsilon_0 h}$ avec un cylindre de hauteur h
 (on prendra $h \approx 20 \text{ cm}$ comme taille de bâton)

$\Rightarrow mg \approx \frac{p \cdot Q}{2\pi r^2 \epsilon_0 h}$ or $m = \frac{M}{dA}$ avec $M = 18 \text{ g.mol}^{-1}$

$$\text{Donc } Q \approx \frac{2\pi r^2 \epsilon_0 h M g}{\rho V_A} = \frac{2\pi \cdot (10^{-2})^2 \cdot 885 \cdot 10^{-12} \times 0,2 \times 18 \cdot 10^{-3} \cdot 981}{10^{-29} \times 6,02 \cdot 10^{23}}$$

$Q \approx 3 \cdot 10^{-11} \text{ C}$ soit environ $2 \cdot 10^8 e^-$, ce qui semble raisonnable, compte-tenu du nombre d'atomes dans le barreau, à qui des e^- ont pu être arrachés / ajoutés par frottement.

Méthode 2 : à partir de l'estimation de la force s'exerçant sur le barreau, de la part des molécules d'eau.

D'après la seconde loi de Newton : $\vec{F}_{\text{molécule d'eau} \rightarrow \text{barreau}} = -\vec{F}_{\text{barreau} \rightarrow \text{molécule d'eau}}$
de norme mg
d'après la méthode 1

$$\text{donc } \underbrace{F_{\text{molécule d'eau} \rightarrow \text{barreau}}}_{\approx Q E_{\text{dipôle}}} \approx mg$$

$$\approx Q E_{\text{dipôle}}$$

on suppose que toute la charge du barreau est placée au même point pour simplifier et que le champ créé par une molécule d'eau dans la direction de \vec{p} ($\theta=0$) vaut $\|\vec{E}_{\text{dipôle}}\| = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

Q. $\leftarrow \vec{p}$

$$\Rightarrow Q \approx \frac{M g 2\pi \epsilon_0 r^3}{\rho V_A p}$$

Seul un facteur $r \leftrightarrow h$ diffère ici à cause de la modélisation plus grossière du barreau.

$$\Rightarrow Q \approx 2 \cdot 10^{-12} \text{ C}$$