NOM : Prénom :

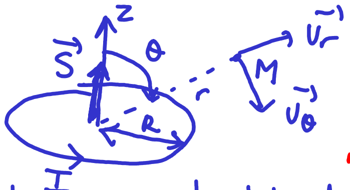
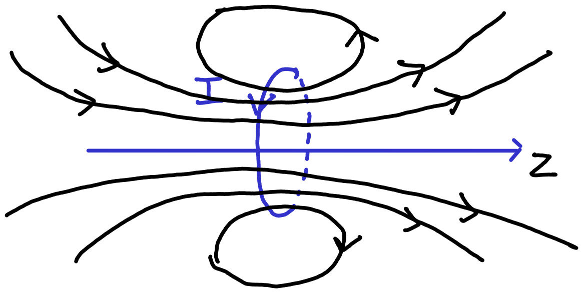
Interrogation de cours n°9

/15

1 Dipôles magnétiques

- Remplir le tableau ci-dessous.

/5,5

	Magnétostatique
Dipôle	Dipôle magnétique = boucle de courant $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$ ⊛  schéma ⊛ Convention ⊛ Orientation de $\vec{S}$ par rapport à I avec la règle de la main droite.
Approximation dipolaire	$r \gg R_{spire}$ ⊛
Champ loin du dipôle	$\vec{B}_{dipôle}(M) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{u_r} + \sin\theta\,\vec{u_\theta}\right)$ ⊛
Potentiel loin du dipôle	(H.P.)
Représentation des lignes de champ	 Allure ⊛ Bonne orientation des lignes de champ ⊛
Couple exercé par un champ extérieur	$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{ext}$ ⊛
Énergie potentielle dans un champ extérieur (dipôle permanent)	$E_{pot} = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{ext}$ ⊛
Force (dipôle permanent)	Déplacement vers les zones de champ $\vec{B}_{ext}$ intense ⊛ $\vec{F} = -\vec{grad}(E_{pot}) = \vec{grad}(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{ext})$ ⊛

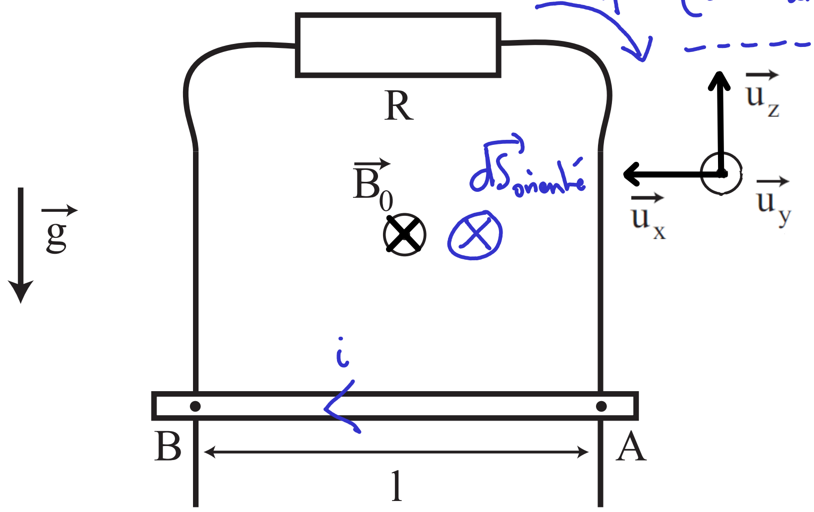
2 Induction électromagnétique - Rail de Laplace

Considérons un barreau métallique de masse m et de longueur ℓ astreint à se déplacer verticalement et sans frottement dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, en présence d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0 = -B_0\vec{u}_y$ comme représenté sur la figure ci-dessous.

Le barreau métallique est conducteur et ferme un circuit de résistance globale R dont on négligera le coefficient d'auto-induction L.

Le barreau est lâché à $t = 0$ sans vitesse initiale en $z = 0$. On cherche à étudier le mouvement ultérieur. On notera z la position verticale du barreau.

+ (orientation liée à $\vec{dS}$ orientée).



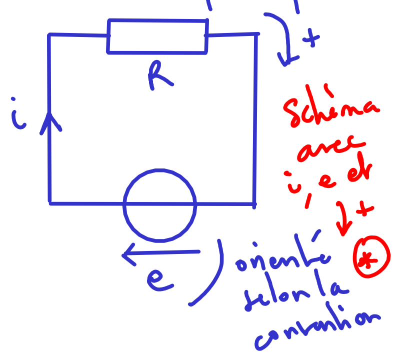
1. *Mise en équation* :
   (a) Déterminer l'équation électrique du circuit. Commenter les signes des grandeurs calculées.
   (b) Déterminer l'équation mécanique du circuit. Là encore, commenter les signes.

2. *Résolution* :
   (a) Déterminer la vitesse du barreau au cours du temps.

3. *Bilan énergétique* :
   Réaliser un bilan énergétique dans lequel on commentera le signe et l'origine de chacun des termes.

1) Cas de Lorentz : circuit mobile dans $\vec{B}$ constant $\Rightarrow \exists$ i induit dans le circuit (on ne cherche pas encore le sens réel).

a) Schéma électrique équivalent. On choisit l'orientation selon AB car elle est imposée par l'énoncé (permet d'avoir $\phi > 0$). On oriente i dans le m̂ sens que e et dans ce cas, la loi des mailles conduit à $e = Ri$ (*)
avec e donné par la loi de Faraday



$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\iint \vec{B}\cdot \vec{dS}_{\text{orientée}}\right] \quad (*)$$

$$= -\frac{d}{dt}\left[\iint -B\vec{u}_y \cdot dx\,dz(-\vec{u}_z)\right] = -\frac{d}{dt}\left[B a \cdot (-z)\right]$$

permet d'avoir une longueur positive car $z < 0$

donc finalement $e = Ba\dot{z}$ et $\boxed{i = \frac{e}{R} = \frac{Ba\dot{z}}{R}}$ (1) (*)

$i = i_{AB}$ d'après le schéma

2,5 On vérifie bien que si la barre tombe $z \searrow$ donc $\dot{z} < 0$ et $i_{AB} < 0$, ce qui est cohérent car $\vec{F}_L = \int \underbrace{i_{AB}\, d\vec{\ell}}_{\text{selon } -\vec{U}_x \text{ car } i<0} \wedge \underbrace{\vec{B}}_{\text{selon } -\vec{U}_y}$ est bien selon $+\vec{U}_z$ et empêche donc la chute de la barre (cf loi de Lenz) (*)

b) PFD à la barre dans R galiléen, en projection sur $\vec{U}_z$:

1 $$m\ddot{z} = -mg + \underbrace{\left[\int_A^B i\, d\vec{\ell} \wedge \vec{B}\right]\cdot \vec{U}_z}_{ia\vec{U}_x \wedge -B\vec{U}_y} \Rightarrow \boxed{m\ddot{z} = -mg \underbrace{-iaB}_{\text{signe cohérent avec (*)}}} \quad (2) \ (*)$$

2) Résolution : on injecte (1) dans (2) :

$$m\ddot{z} = -mg - \frac{(Ba)^2}{R}\dot{z} \quad \text{soit} \quad \ddot{z} + \frac{(Ba)^2}{mR}\dot{z} = -g$$

Si on pose $v > 0$ tq $v = -\dot{z}$ (car $\dot{z} < 0$ quand la barre chute)

1 $$-\dot{v} - \frac{(Ba)^2}{mR} v = -g, \quad \text{soit} \quad \dot{v} + \frac{v}{\tau} = g \ (*)$$

et $v(t) = g\tau + Ae^{-t/\tau}$, or $v(t=0) = 0$ donc :

$$\boxed{v(t) = g\tau\left[1 - e^{-t/\tau}\right]} \ (*)$$

La vitesse est bien positive et "sature" à $g\tau$, ce qui illustre le freinage par induction.

3) (1) $\times\, i \Rightarrow Ri^2 = Ba\dot{z}i$

(2) $\times\, \dot{z} \Rightarrow m\ddot{z}\dot{z} = -mg\dot{z} - Ba\dot{z}i$

$$\Rightarrow \underbrace{m\ddot{z}\dot{z}}_{\frac{d}{dt}\frac{1}{2}mv^2} + \underbrace{mg\dot{z}}_{\frac{d\, mgz}{dt}} = -Ri^2$$

1 $$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \underbrace{-Ri^2}_{P_{Joule}} \ (*)$$

L'énergie mécanique est donc dissipée sous forme d'effet Joule

$E_m \searrow$ car $\frac{dE_m}{dt} < 0$ (*)

Équations locales de l'électromagnétisme

- Donner la définition de $div\vec{A}$ et $\vec{rot}\vec{A}$ en coordonnées cartésiennes.

1

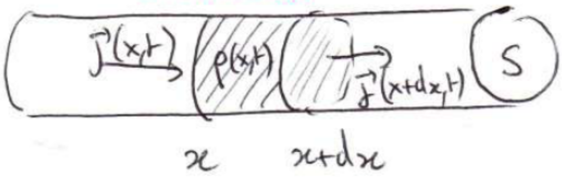
$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{A} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \partial A_x/\partial z - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y \end{pmatrix}$$

- Donner l'équation locale de conservation de la charge. La démontrer dans le cas d'une géométrie unidimensionnelle (courant réparti de manière uniforme dans un fil de section S sous la forme $\vec{j} = j(x,t)\vec{u}_x$.

$\rho = \rho(x,t)$

Schéma



Unidimensionnel :

$\vec{j} = j(x,t)\vec{u_x}$

$\rho = \rho(x,t)$

On exprime la variation de la charge élémentaire δQ_{int} contenue dans la portion de cylindre entre les abscisses x et $x+dx$, entre les instants t et $t+dt$:

4

① $d(\delta Q_{int}) = \delta Q_{int}(t+dt) - \delta Q_{int}(t) = \frac{d\,\delta Q_{int}}{dt}dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} S\,dx\,dt$

$\delta Q_{int} = \rho(x,t) S\,dx$

② $d(\delta Q_{int}) = I(x,t)\,dt - I(x+dx,t)\,dt = -\frac{\partial I}{\partial x} dx\,dt = -\frac{\partial j}{\partial x} S\,dx\,dt$

$I = \iint \vec{j}\cdot d\vec{S} = j(x,t)S$

① = ② $\Rightarrow$ $\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}}$, soit $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0 \text{ en cartésiennes}}$